Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II) **U.E.F.2**

Droit - Economie - Sciences Sociales **5289**

Melun

Session : Mai 2019

Année d'étude : Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion

Discipline : *Statistiques 4*
(Unité d'Enseignements Fondamentaux 2)

Titulaire(s) du cours :
M. Matthieu RICHARD

Document(s) autorisé(s) :
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice est autorisée.

Université Paris II - Institut de droit et d'économie de Melun — Statistiques 4 (5289)
Licence 2 Sciences économiques et Gestion — Cours de M. RICHARD

Mai 2019

Les documents ne sont pas autorisés.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 0) = \frac{1}{2n},\ P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } P(X_n = n) = \frac{1}{2n}.$$

Étudier la convergence en loi, en probabilité et en moyenne quadratique de la suite de variables aléatoires (X_n).

Exercice 2

Partie A

Un institut de sondage réalise une enquête afin d'estimer la proportion p d'électeurs qui voteront pour la liste de la candidate Mme K lors des prochaines élections européennes. Il constitue donc un échantillon (aléatoire) de n personnes inscrites sur les listes électorales.

1. Notations
Introduire les notations. En particulier, introduire des variables aléatoires X_1,...,X_n (dont les réalisations seront notées x_1,...,x_n). Indiquer ce que ces variables aléatoires représentent et en donner toutes les propriétés utiles pour la suite de l'exercice.

2. Construction d'estimateurs
(a) Déterminer l'estimateur de p obtenu par la méthode des moments d'ordre 1.
(b) Montrer que la vraisemblance de $(x_1, ..., x_n)$ est donnée par :

$$L(x_1, ..., x_n; p) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \times (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

(c) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de p.

3. Propriétés de l'estimateur $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
(a) Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de p.
(b) Montrer que l'information de Fisher apportée par l'échantillon sur le paramètre p est $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$.
(c) Montrer que l'estimateur $\overline{X_n}$ est efficace.

Tourner la page SVP

4. Estimation de p
L'institut de sondage a interrogé 900 personnes. 315 sondés ont indiqué qu'ils voteraient pour Mme K.
(a) Donner une estimation ponctuelle non biaisée de p.
(b) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance 95 %.

5. Interprétation de l'écart entre l'estimation fournie et le résultat des élections
La liste de Mme K obtient 41 % des votes. Comment pouvez-vous expliquer ce résultat ?

Partie B

L'équipe de campagne de Mme K souhaite connaître le montant mensuel des dépenses de logement d'un actif (aides déduites). Son équipe décide d'interroger 10 personnes actives de milieux sociaux différents parmi leurs connaissances. L'équipe suppose que les dépenses mensuelles de logement d'un actif peuvent être représentées par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ inconnus. Les dépenses mensuelles de logement des actifs de l'échantillon sont notées Y_1, Y_2, ..., Y_{10}. Ces variables aléatoires sont supposées avoir la même loi que Y et être indépendantes. L'objectif de l'équipe est de donner une estimation des paramètres m et σ.

1. Quels sont les estimateurs naturels de m et de σ^2 ? Rappeler leurs propriétés, sans les justifier.

2. Les dépenses de logement mensuelles des 10 actifs de l'échantillon sont les suivantes :

440 €, 1210 €, 210 €, 680 €, 180 €, 1120 €, 430 €, 0 €, 750 €, 580 €.

On notera que $\frac{440+1210+...+580}{10} = 560$ et que $\frac{(440-560)^2+(1210-560)^2+...+(580-560^2)}{10} = 139880$.

Pour chaque question, indiquer **sans justification** sur votre copie la bonne réponse. *Le barème appliqué tiendra uniquement compte du nombre de bonnes réponses.*

(a) Donner une estimation ponctuelle non biaisée de m.
A. 354 euros. B. 374 euros. C. 394 euros. D. 504 euros. E. 560 euros. F. 622 euros.

(b) Donner une estimation ponctuelle non biaisée de σ.
A. 354 euros. B. 374 euros. C. 394 euros. D. 504 euros. E. 560 euros. F. 622 euros.

(c) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau de confiance 90 % pour m (en euros).
A. $[354; 766]$. B. $[399; 721]$. C. $[331; 789]$. D. $[388; 732]$.

(d) À quelle valeur l'écart-type σ est-il inférieur avec un niveau de confiance de 90 % ?
A. 293 euros. B. 309 euros. C. 549 euros. D. 579 euros.

3. Que pensez-vous de l'étude réalisée par l'équipe de campagne de Mme K ? Peut-on se fier aux résultats de cette étude ?

Tourner la page SVP

Partie C

1. On suppose que le salaire mensuel net d'un actif peut-être considéré comme étant une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $m = 2250$ euros et d'écart-type $\sigma = 600$ euros.
(a) Quelle est la probabilité que le salaire mensuel net moyen de 5 actifs prélevés au hasard soit supérieur ou égal à 2560 euros.
(b) Quelle est la probabilité que le salaire mensuel net du salarié le mieux payé parmi 5 actifs prélevés au hasard soit supérieur ou égal à 3600 euros.

2. Mme K affirme dans sa campagne : "Les membres de mon équipe sont des gens comme vous, y compris en ce qui concerne leurs rémunérations".

Les salaires mensuels nets des 5 membres de son équipe sont les suivants :

3600 €, 2800 €, 2400 €, 2100 € et 1900 €

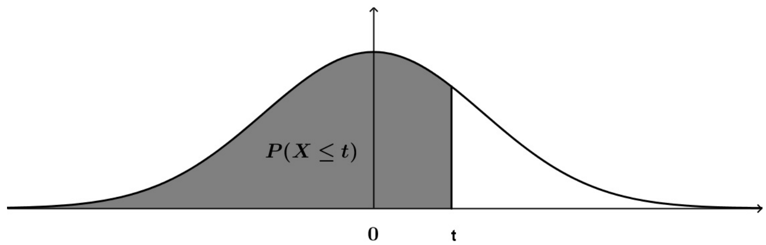
Le salaire mensuel net moyen des membres de son équipe est donc de 2560 euros.

Pensez-vous, comme Mme K, que l'on peut considérer que les membres de son équipe de campagne sont représentatifs de la population, du point du vue des rémunérations ?

Loi normale centrée réduite

$$X \sim \mathcal{N}(0;1)$$

Fonction de répartition $F(t) = P(X \leq t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

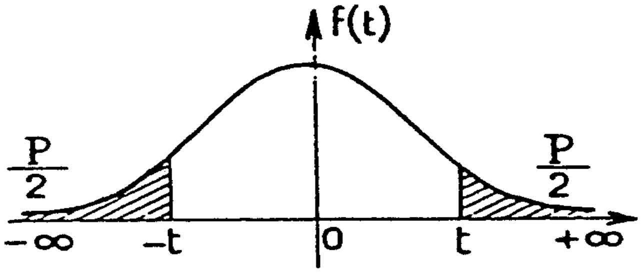
La valeur de t se lit en additionnant les valeurs en en-tête de ligne et de colonne. La valeur de $F(t)$ correspondante est la valeur lue dans la case située sur la même ligne et la même colonne.

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	4,0	5,0
F(t)	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,99997	0,9999997

TABLE DE DISTRIBUTION DE t
(Loi de Student)

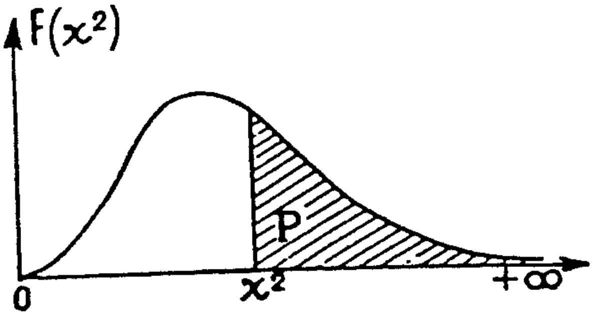
Valeurs de t ayant la probabilité *P* d'être dépassées en valeur absolue



P / *ν*	0,900	0,800	0,500	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,158	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,695	1,358	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,679	1,295	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

TABLE DE DISTRIBUTION DE χ^2
(Loi de K. Pearson)

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité *P* d'être dépassées



P / ν	0,990	0,975	0,950	0,900	0,700	0,500	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,148	0,455	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	0,713	1,386	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	1,42	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	2,20	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	3,00	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	3,83	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,67	6,35	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,53	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	7,27	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	8,15	10,34	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,93	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,82	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,72	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	12,62	15,34	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	13,53	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	14,44	17,34	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	15,35	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	16,27	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	17,18	20,34	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	18,10	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	19,02	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	19,94	23,34	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	20,87	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	21,79	25,34	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	22,72	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	13,93	18,94	23,65	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	24,58	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	25,51	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque $\nu > 30$, on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ suit la loi normale réduite.