Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.F.2/5287
Droit-Economie-Sciences Sociales Melun

Session :	Septembre 2018.
Année d'étude :	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline :	***Mathématiques 4*** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 2).
Titulaire du cours :	M. Lorenzo BASTIANELLO.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

Rattrapage - Mathématiques 4 (5287)

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Partie 1. (9 points) Questions Choix Multiple. Instructions :

- TRÈS IMPORTANT : ÉCRIRE LES RÉPONSES DU QCM SUR LA COPIE (Par exemple 7) = (c)). NE RIEN MARQUER SUR LE SUJET.
- Seulement une réponse est correcte, ne pas fournir les calculs.
- Réponse correcte, 1 points. Réponse incorrecte ou pas de réponse, 0 points.

1. Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont

(a) -1, -2, 2 (b) 1, 2, 4 (c) 1, 2, -4 (d) -1, 2, -4

2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. La valeur propre correspondante au vecteur propre $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) -3

3. L'équation différentielle $ww' + 3t = 10$ est

(a) À variables séparées mais pas linéaire.
(b) Linéaire mais pas à variables séparées.
(c) Séparable et linéaire.
(d) Pas à variables séparées et pas linéaire.

4. Quels sont les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ telles que l'équation différentielle $y' = \frac{y+t^2-2y\sqrt{t}}{t}$ est de la forme $y' + a(t)y = b(t)$

(a) On ne peut pas répondre.
(b) $a(t) = 2\sqrt{t} - 1$ et $b(t) = t^2$
(c) $a(t) = \frac{1-2\sqrt{t}}{t}$ et $b(t) = t$
(d) $a(t) = \frac{2\sqrt{t}-1}{t}$ et $b(t) = t$.

5. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y' = 1 + t - y - yt$. (k est une constante réelle).

(a) $y(t) = ke^{-t}$

(b) $y(t) = 1 + ke^{t+\frac{t^2}{2}}$

(c) $y(t) = 1 + ke^{-t-\frac{t^2}{2}}$

(d) $y(t) = e^{-t-\frac{t^2}{2}}(t + \frac{t^2}{2} + k)$

6. Laquelle entre les séries suivantes est absolument convergente ?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{0.998}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^{1.001}}$

7. Considérons les séries

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-4}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^n$

Laquelle (lesquelles) diverge (divergent).

(a) La (i) et la (ii)

(b) Aucune

(c) Seulement la (iv)

(d) Seulement la (ii)

8. Considérons une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 9x^2 + 12xy + 4y^2$ est

(a) Semi-définie positive mais pas définie positive

(b) Définie positive

(c) Semi-définie négative

(d) Indéfinie.

9. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Le système $(S) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = m \\ -2x_1 - 10x_2 - 6x_3 = -2m \end{cases}$ admet

(a) Aucune solution

(b) Une infinité de solutions

(c) Soit une infinité de solutions soit aucune

(d) Une unique solution

Partie 2. (13 points) Questions ouvertes.

1. (5 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}^+$, on se propose de montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature. *(Vous pouvez utiliser les postulats des questions que vous n'avez pas réussies à traiter pour répondre aux suivantes.)*

   1. (1.5 points) Démontrer que si $\sum u_n$ alors $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.
   2. On suppose que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.
      (a) (1.5 points) Démontrer que u_n converge vers 0.
      (b) (1 point) Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{2}{3}$.
      (c) (1 point) En déduire que $\sum u_n$ converge.

2. (4 points) Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$, $y(0) = 5$.

3. (4 points) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   1. (0.5 points) Justifier, sans calculs, que A est diagonalisable.
   2. (1 point) Déterminer les valeurs propres de A.
   3. (1.5 points) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$
   4. (1 point) Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{72}$. La matrice B est-elle diagonalisable ?