Université Paris II
M1 Economie et Gestion
Monnaie-Finance-Banque
Janvier 2019. 1h30

Mathématiques appliquées à la finance (4334)
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = x_2(4 - x_1^2) \\ \qquad\qquad 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 9 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
b) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
c) Montrer que ces conditions sont nécessaires.
d) Résoudre le problème.

Exercice 2
On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser} \int_0^T [\,-\dot{x}^2(t) - 4x^2(t) + 4tx(t) + x(t)\dot{x}(t)\,]dt - x^2(T)$$

$$x(0) = 0$$

a) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et la condition de transversalité.
b) Trouver le(s) candidat(s).
c) Résoudre le problème.

Exercice 3 On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad \displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2(t) - \frac{1}{2}v^2(t)\right)dt \; + \; x(1) \\ \qquad\qquad \dot{x}(t) = 2x(t) + v(t) \\ \qquad\qquad x(0) = 0, \quad v(t) \in I\!R \end{cases}$$

a) Ecrire le Hamiltonien du problème.
b) Ecrire l'équation adjointe, le principe du maximum de Pontryagin et la condition de transversalité.
c) Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.
d) Résoudre le système.
e) Résoudre le problème de contrôle optimal.
f) Ecrire le problème de contrôle optimal sous forme d'un problème de calcul des variations (sans le résoudre).

On donne: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2+\sqrt{5} & -2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}+5}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-2\sqrt{5}+5}{10} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}.$