

Théorie de la décision : risque et incertitude  
Master 1 Economie et gestion – Ingénierie économique  
Examen Janvier 2018  
V. Vergopoulos

*Les calculatrices et notes de cours sont interdites.*

**Question 1** (8 points)

Un investisseur dispose d'une richesse initiale  $w_0$ . Sa fonction d'utilité  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  et vérifie  $u' > 0$  et  $u'' < 0$ . Deux actifs sont disponibles. L'un est risqué: son rendement noté  $R$  est aléatoire et prend un nombre fini de valeurs possibles. L'autre est non-risqué: son rendement noté  $r$  est connu. Un portefeuille est représenté par le montant  $\alpha$  investi dans l'actif risqué. On suppose que l'investisseur choisit le portefeuille qui maximise l'espérance d'utilité de la richesse finale. Soit  $\alpha^*$  le portefeuille ainsi choisi.

- a) Donner une interprétation économique des hypothèses  $u' > 0$  et  $u'' < 0$ .
- b) Donner la richesse finale en fonction de  $\alpha$  et écrire le problème de maximisation. Ecrire la condition nécessaire d'ordre 1 pour l'optimalité de  $\alpha^*$ . Est-elle suffisante?
- c) A quelle condition sur  $r$  et  $R$  a-t-on  $\alpha^* > 0$ ? Interpréter.
- d) On considère maintenant deux investisseurs, A et B, qui ne diffèrent que par leur fonction d'utilité que l'on note  $u$  et  $v$  respectivement. On suppose que A est plus averse au risque que B. Soient  $\alpha_A^*$  et  $\alpha_B^*$  leur portefeuille optimal. Montrer que  $\alpha_A^* \leq \alpha_B^*$ . Interpréter.

**Question 2** (6 points)

On considère les deux loteries suivantes:

$$l = [\frac{1}{4}, 300; \frac{1}{4}, 100; \frac{1}{4}, 0; \frac{1}{4}, -200] \quad \text{et} \quad m = [\frac{1}{2}, 200; \frac{1}{2}, -100]$$

- a) Montrer qu'on a  $\mathbb{E}[u(l)] \leq \mathbb{E}[u(m)]$  pour toute fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  concave. Que peut-on en déduire sur  $l$  et  $m$ ?
- b) Donner la définition de la dominance stochastique d'ordre 2 (DS2). Tracer les fonctions de répartitions induites par  $l$  et  $m$ . Est-ce que  $m$  domine  $l$  au sens DS2?

**Question 3** (6 points)

Soit  $X$  un ensemble de conséquences et  $L$  l'ensemble des loteries sur  $X$ . On considère un agent dont les préférences sur  $L$  sont notées  $\succsim$ . Cet agent est de type espérance d'utilité et sa fonction d'utilité est notée  $u$ .

- a) Quelle est la définition de la notion de prudence en termes de préférences? Quelle est sa caractérisation en termes d'utilité?
- b) On suppose l'agent prudent. Laquelle des deux loteries suivantes choisit-il:

$$l = [\frac{1}{4}, 300; \frac{3}{4}, 100] \quad \text{et} \quad m = [\frac{3}{4}, 200; \frac{1}{4}, 0] \quad ?$$