Université Paris II
L3 Economie et Gestion
Septembre 2019. 1h30

Mathématiques 5
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I\!R^2$ par : $f(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2$.
Etudier les extrema de f sous la contrainte $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$.

Exercice 2

On considère le problème suivant dans $I\!R^2$

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 4x_2^2 \\ \qquad\qquad x_2 \geq 0 \\ \qquad\qquad 5 - x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A admet une valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et une valeur propre simple $\lambda_3 = 0$.
b) A est-elle inversible?
c) Montrer que A est diagonalisable dans $I\!R$ et trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).
d) Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) \begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= -y_1 - y_3 \\ y_3' &= -y_1 - y_2 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.
e) Résoudre le système différentiel linéaire.