

Septembre 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer. Le sujet est noté sur 11.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais commencez si possible chaque exercice en haut d'une nouvelle page de votre copie et pensez à numéroter les pages.

Exercice 1 (2,5 points)

1. Soit $(X_n)_{n \geq 3}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, dont la loi est donnée par

$$\forall n \geq 2 \quad \begin{cases} P(X_n = 0) = 2/3 + 1/2n \\ P(X_n = 1) = 1/3 - 1/n \\ P(X_n = 2) = 1/4n \\ P(X_n = 3) = 1/4n \\ P(X_n = k) = 0 \text{ si } k \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une loi que l'on précisera.

2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, dont la loi est donnée par

$$\forall n \geq 1 \quad \begin{cases} P(Y_n = 0) = 1 - 1/n \\ P(Y_n = n) = 1/n \\ P(Y_n = k) = 0 \text{ si } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

On admet que $E(Y_n) = 1$ et $\text{Var}(Y_n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.
- Montrer qu'elle ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.
- Montrer que la suite (\bar{Y}_n) converge en probabilité vers 1.
- Vers quoi converge en probabilité la suite $(5\bar{Y}_n - 2)$?

Exercice 2 (4 points)

Afin d'optimiser la fréquence des moyens de transports, le service municipal d'une ville souhaite estimer le temps d'attente moyen aux arrêts de bus de l'une des principales lignes. Pour cela, on considère que le temps d'attente en minutes peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ où θ est un réel inconnu strictement positif. Rappelons que sa densité est égale à

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta \times e^{-x/\theta} & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le temps d'attente de n usagers choisis au hasard fournit donc un échantillon (X_1, \dots, X_n) de la variable aléatoire X .

- Montrer que $T_n = \bar{X}_n$ est un estimateur de θ par la méthode des moments.
- Donner un deuxième estimateur T'_n de θ obtenu par la méthode des moments.
- Montrer que l'estimateur de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n .

4. Montrer que l'information de Fisher est égale à $I_n(\theta) = n/\theta^2$.
5. Donner la définition d'un estimateur sans biais et d'un estimateur convergent.
L'estimateur T_n vérifie-t-il ces propriétés ?
6. Est-il efficace ?

Exercice 3 (2,5 points)

1. On considère la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes et de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}x + \frac{n-2}{2n} & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer la convergence en loi de la suite (X_n) vers une variable X dont on précisera la loi.

2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 10.
On considère la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de v.a. définie par

$$\forall n \geq 1 \quad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{2n} + 7$$

- (a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer Z_n en fonction de \bar{Y}_n .
 - (b) Montrer que la suite $(\bar{Y}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers un réel y que l'on précisera.
 - (c) En déduire la convergence en probabilité, puis en loi, de la suite (Z_n) vers la v.a. constante en 12. On citera précisément les théorèmes utilisés.
3. En déduire la convergence de la suite $(X_n + Z_n)$ vers la variable $T = X + 12$.

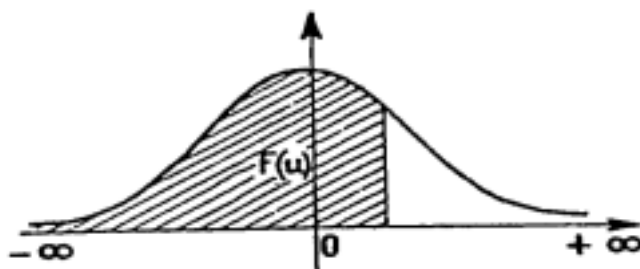
Exercice 4 (2 points)

Un réparateur de téléphones mobiles utilise un appareil bon marché afin de détecter les batteries usagées et il souhaite savoir la proportion p de batteries défectueuses que l'appareil arrive à identifier correctement. Pour cela, il utilise un lot de 100 batteries hors d'usage et les fait tester à l'appareil, qui en considère seulement 80 comme usagées.

1. Donner une estimation du paramètre p en précisant les propriétés de l'estimateur utilisé.
2. Construire un intervalle de confiance unilatéral au niveau de confiance $1 - \alpha = 0,975$ pour le paramètre p à l'aide d'un abaque.
(Rappel : un abaque donnant l'intervalle bilatéral au niveau de confiance $1 - \alpha = 0,95$ donne aussi les intervalles unilatéraux au niveau de confiance $1 - \alpha/2 = 0,975$.)
3. On suppose désormais qu'on ne dispose pas de cet abaque.
 - (a) Montrer que l'on peut approcher la variable aléatoire \hat{p}_n par une loi normale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Construire alors un nouvel intervalle de confiance pour p . (On n'effectuera pas les calculs jusqu'au bout.)

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de $F(u)$ pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple

pour u = 1,37

F(u) = 0,9147

pour u = -1,37

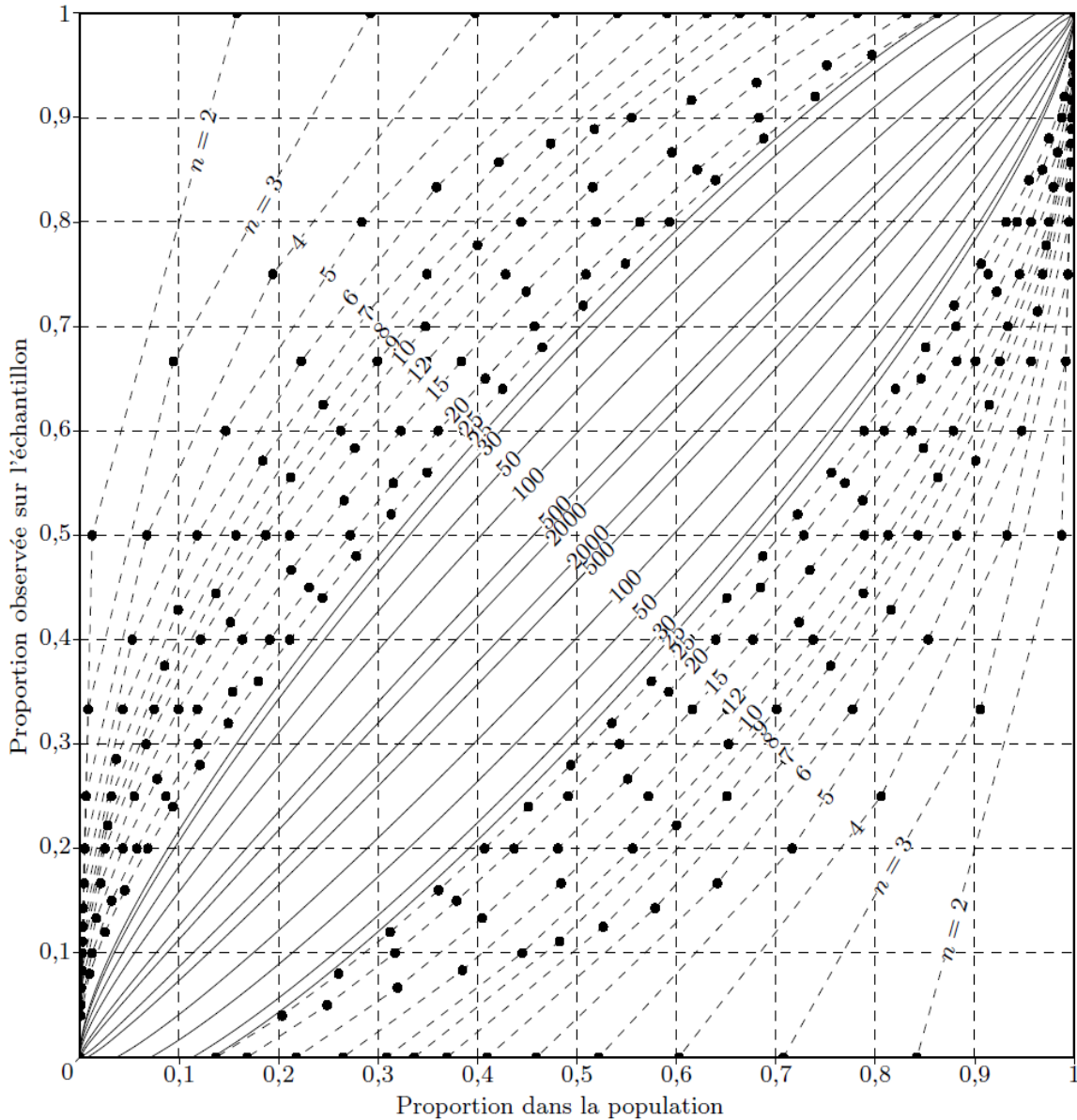
F(u) = 0,0853

TABLE 9.

Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

ABAQUE, intervalle bilatéral, $\alpha=0,05$

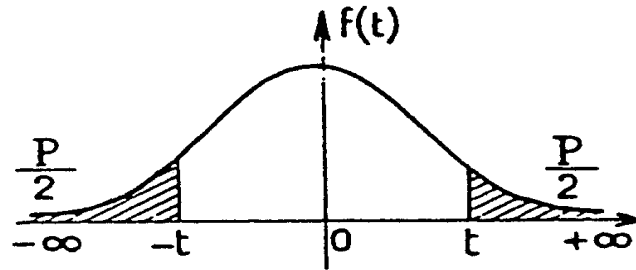
L'abaque suivant a été construit pour un niveau de confiance $1 - \alpha = 0,95$. Pour une taille d'échantillon $n \leq 25$, elle donne l'intervalle de confiance « exact » (méthode de Clopper-Pearson) pour la proportion, et, pour $n > 25$, un intervalle de confiance asymptotique — moins lourd à calculer — déterminé à l'aide d'une approximation normale.



En ordonnée, on place la proportion observée p et on obtient les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance approximatif comme les abscisses des points d'intersection de la droite horizontale $y = p$ avec les deux courbes correspondant à la taille n de l'échantillon.

TABLE DE DISTRIBUTION DE t
(Loi de Student)

Valeurs de t ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue



P									
v	0,900	0,800	0,500	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,158	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,695	1,358	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,679	1,295	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291