Econométrie

Licence Economie-Gestion. Parcours Analyse Economique

Professeur Georges Bresson

Session Septembre 2019

Exercice 1 (6 points) - Soit le modèle linéaire géneral:

$$y = X\beta + u$$

où y est de taille $(n, 1)$, X est de taille (n, k) et β est de taille $(k, 1)$. On post-multiplie (multiplication à droite) les variables explicatives par une transformation non singulière C telle que: $X^* = XC$ et soit $y = X^*\beta^* + u$.

1. Montrez que: $P_{X^*} = P_X$ et $\overline{P}_{X^*} = \overline{P}_X$ où $P_X = X\left(X'X\right)^{-1}X'$ et $\overline{P}_X = I_n - P_X$.
2. En conclure que la régression de y sur X a les mêmes valeurs estimées et les mêmes résidus que la régression de y sur X^*.
3. Supposons que chaque X soit multiplié par une constante. Les valeurs estimées et les résidus changent-ils si l'on estime cette régression par rapport à la précédente?
4. Supposons que X soit constitué de 2 régresseurs X_1 et X_2. Si on régresse y sur $(X_1 - X_2)$ et y sur $(X_1 + X_2)$, cela conduira-t-il aux mêmes résultats que ceux de la régression originale de y sur X_1 et X_2?

Exercice 2 (6 points) - Soit le modèle:

$$y = X\beta + u = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

En utilisant la formule de l'inverse partitionnée[1],

1. montrez que:
$$\widehat{\beta}_{2,MCO}=\left(X_2'\overline{P}_{X_1}X_2\right)^{-1}X_2'\overline{P}_{X_1}y$$
2. En partitionnant le modèle $y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+u$, les équations normales sont:
$$\begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1,MCO} \\ \widehat{\beta}_{2,MCO} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{pmatrix}$$
Ecrivez ce système comme un système de deux équations à deux inconnues ($\widehat{\beta}_{1,MCO}$ et $\widehat{\beta}_{2,MCO}$). En éliminant $\widehat{\beta}_{1,MCO}$, résolvez ce système et montrez que le résultat est:
$$\widehat{\beta}_{2,MCO}=\left(X_2'\overline{P}_{X_1}X_2\right)^{-1}X_2'\overline{P}_{X_1}y.$$
3. En utilisant le théorème de Frisch-Waugh-Lovell, montrez que si $X_1=e_n$, un vecteur unitaire de taille $(n,1)$ indiquant la présence d'une constante dans le modèle et si X_2 est un ensemble de variables économiques, alors:
   (a) $\widehat{\beta}_{2,MCO}$ peut être obtenu en régressant $(y_i-\overline{y})$ sur l'ensemble des variables X_2 exprimées en écarts à leurs moyennes $\left(X_2-\overline{X}_2\right)$ où $\overline{X}_2=e_n'X_2/n$;
   (b) l'estimateur de la constante $\widehat{\beta}_{1,MCO}$ peut être obtenu par: $\overline{y}-\overline{X}_2\widehat{\beta}_{2,MCO}$

Exercice 3 (4 points) - Soit un simple processus AR(1):
$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t\ ,\ |\rho|<1,\ t=1,...,T \text{ et } \varepsilon_t\sim iid\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$$
avec $\varepsilon_t\sim iid\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ indépendant de $u_0\sim\left(0,\sigma_\varepsilon^2/\tau\right)$ où τ est un paramètre positif arbitraire.

[1] L'inverse partitionnée de la matrice:
$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$
est:
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & B_{22} \end{pmatrix}$$
où $B_{22}=\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)$.

1. Montrez que cette variance arbitraire de la perturbation initiale (u_0) génère des perturbations hétéroscédastiques $var\,(u_t) \equiv \sigma_t^2 = f\,(t, \sigma_\varepsilon^2)$.

2. Quelle doit être la valeur de τ pour rendre les perturbations homoscédastiques (*i.e.*, $\sigma_t^2 = \sigma_\varepsilon^2$)?

3. Montrez que σ_t^2 est croissant (resp. décroissant) si $\tau > (1-\rho^2)$ (resp. si $\tau < (1-\rho^2)$).

4. Montrez que $cov\,(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_{t-s}^2$, $t \geq s$.

Exercice 4 (4 points) - On considère le modèle suivant:

$$y_i = x_i \beta + u_i$$

pour seulement deux observations: $i = 1, 2$ et où $|x_1| \neq |x_2|$ sont scalaires et non aléatoires. On suppose que:

$$\begin{array}{rcl} u_i & \sim & N\left(0, \sigma^2\right) \\ u_1 & = & \rho u_2 + \varepsilon, |\rho| < 1 \\ \varepsilon & \sim & N\left(0, \left(1-\rho^2\right)\sigma^2\right) \end{array}$$

où ε et u_2 sont indépendants.

1. Calculez l'estimateur MCO de β.

2. Calculez l'estimateur du maximum de vraisemblance de β.

3. Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de ρ est non aléatoire.

4. Comment se comportent les estimateurs du maximum de vraisemblance de β et de ρ quand $x_1 \to x_2$ (avec $x_2 \neq 0$)? pour $y_1 = y_2$ puis pour $y_1 \neq y_2$?

Aucun document autorisé.
Calculatrice autorisée.