Examen de Calcul Stochastique **Aout-Sept. 2019**

Durée : 1h30
Sans document

Dans tout l'examen on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit sur cet espace un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On munit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la filtration naturelle du mouvement brownien définie par $\forall t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. On obtient alors un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Questions de cours

1) Donner la définition du mouvement brownien ainsi qu'une deuxième caractérisation possible.

2) Donner la définition d'une martingale (indexée par $t \geq 0$).

3) Sur quelle classe de processus peut-on définir l'intégrale stochastique contre un mouvement brownien ?

4) Donner (sans démonstration) la loi de $\int_0^t f(s)dW_s$ où W_s est un mouvement brownien et f une fonction déterministe.

Exercice 1 - Pont Brownien

On définit le pont brownien de la manière suivante :

$$Z_t = B_t - tB_1 \ , \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

1) Montrer que $(Z)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1. Donner sa moyenne et sa fonction de covariance.

2) Montrer que la variable aléatoire $Z'_t = Z_{1-t}$ a la même loi que Z_t, ceci pour tout $t \in [0; 1]$.

3) Soit $Z''_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ défini pour $0 \leq t < 1$.

1. Montrer que Z''_t tend vers 0 (presque sûrement) lorsque t tend vers 1.

2. Montrer que le processus $(Z'')_{0\leq t\leq 1}$ prolongé par 0 en $t = 1$ a la même loi que $(Z)_{0\leq t\leq 1}$

Exercice 2 - Equation Différentielle Stochastique (EDS)

On s'intéresse à la solution X de l'EDS :

$$X_t \quad = \quad x + \int_0^t (a + bX_s)ds + \int_0^t (\alpha + \beta X_s)dB_s, \quad \forall t \geq 0$$

où a, b, α, β et x sont des réels fixés.

1) Justifier l'existence et l'unicité de la solution de cette EDS.

2) Montrer que la fonction $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ est solution d'une equation différentielle ordinaire. Résoudre cette équation et donner l'expression de $m(t)$.

On pose pour tout t positif :

$$Y_t = \exp((b - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta dB_t)$$

3) Ecrire l'EDS dont le processus $(Y_t^{-1})_{t\geq 0}$ est solution.

4) Démontrer que :

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{1}{Y_t}\left((a - \alpha\beta)dt + \alpha dB_t\right)$$

5) En déduire une expression pour X_t.