Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.C.2
Droit-Economie-Sciences Sociales 4478
Assas

Session :	Septembre 2019.
Année d'étude :	Première année de Master économie-gestion mention ingénierie économique et statistique.
Discipline :	**Théorie de la décision : ambiguïté** (Unité d'Enseignements Complémentaires 2).
Titulaire du cours :	M. Lorenzo BASTIANELLO.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

Indications et consignes :

— La qualité de la présentation et la tenue de la copie seront prises en compte.

— *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.*

1. (12 points) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω.

1. (2 points) Donner les trois propriétés qu'une probabilité $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ doit satisfaire.
2. (3 points) Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. Décrire *brièvement* les trois approches historiques (et philosophiques) pour le calcul de $P(A)$. Indiquer les limites que l'on a vu en cours.
3. (1 point) Donner la définition d'une capacité $v : \mathcal{A} \to [0,1]$.
4. (1 point) Montrer que toute probabilité est une capacité.
5. Une capacité est convexe ssi $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ $v(A_1 \cup A_2) + v(A_1 \cap A_2) \geq v(A_1) + v(A_2)$.
   (a) (2 points) Montrer que une capacité v est convexe ssi $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ t.q. $A \subset B$ et $B \cap C = \emptyset$, $v(B \cup C) - v(B) \geq v(A \cup C) - v(A)$.
   (b) (3 points) Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante et convexe telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $v : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par $v(A) := f(P(A))$ est une capacité convexe.
   (On utilisera le résultat suivant. Soit $R(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Alors f est convexe ssi $R(x,y)$ est croissant en x (en y) pour y (pour x) fixé).

2. (9 points) Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble d'états de la nature et $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des lois de probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$, c.a.d. si l'on dénote $p_i = P(\{\omega_i\})$ on a $\mathcal{L} = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n | p_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n, \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ où $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{L},\ P(\{\omega_i\}) \geq a_i, \forall i = 1, \ldots, n\}$ avec a_i fixé dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$.

1) (1 point) Montrer que le vecteur $(p_1, \ldots, p_n)$ défini par $p_i = a_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ est dans $\mathcal{P}$.

2) (1 points) Montrer que $v : \mathcal{A} \to [0,\ 1]$ définie par $v(A) = \min_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ est une capacité.
On admet dans la suite que la capacité v définie ci-dessus est convexe.

3) (1.5 points) À l'aide du point 1), calculer explicitement $v(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.
(Astuce : Considérer trois cas, $A = \Omega$, $A = \emptyset$ et $A \neq \Omega, \emptyset$.)

4) (2 points) Montrer que les ensembles $\mathcal{P}$ et $\{P \in \mathcal{L},\ P(A) \geq v(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$ sont égaux.

5) (1 point) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, donner une expression alternative de $\min_{P \in \mathcal{P}} E_P(f)$ en la justifiant.

6) (2.5 points) Application numérique :

Ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
a_i	$2/10$	$3/10$	$1/10$	$2/10$
f_1	0	2	4	1
f_2	2	1	1	2

Calculer $\int f_i \, dv$ puis $\min_{P \in \mathcal{P}} E_P(f_i),\ i = 1, 2$. Lequel des deux actifs f_1 ou f_2 choisira un adversaire de l'incertitude ?