

<b>Session :</b>	Septembre 2019.
<b>Année d'étude :</b>	Première année de licence économie-gestion mention économie et gestion.
<b>Discipline :</b>	<i>Statistiques 2</i> (Unité d'Enseignements Fondamentaux 2).
<b>Titulaire du cours :</b>	M. Lorenzo BASTIANELLO.
<b>Document(s) autorisé(s) :</b>	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

*Examen de Statistiques 2 (5299)***Indications et consignes :**

- La qualité de la présentation et la tenue de la copie peuvent faire l'objet de points négatifs.
- Toutes communications, quelle que soit leur nature, sont interdites.
- *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.*

1. (8 points) Soit  $X$  une variable aléatoire continue avec fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (1 point) Donner les propriétés qu'une fonction de densité doit satisfaire.
  2. (1 point) Trouver la constante  $c \in \mathbb{R}$ .
  3. (2 points) Donner la définition rigoureuse de  $\mathbb{E}(X)$  et  $V(X)$  dans le cas où  $X$  est une variable aléatoire continue. Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $V(X)$  pour  $X$  avec densité  $f$  ci-dessus.
  4. (3 points) Donner la définition de fonction de répartition  $F$ . Écrire les propriétés qu'une fonction de répartition doit satisfaire. Calculer la fonction de répartition pour  $X$  avec densité  $f$  ci-dessus.
  5. (1 point) Calculer  $P(X \geq \frac{1}{2})$ .
2. (5 points) On tire 20 boules d'une urne qui contient 30 boules rouges et 70 boules vertes.
1. On tire avec remise. Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées.
    - (a) (2 points) Quelle loi suit  $X$ ? Trouver  $\mathbb{E}(X)$  et  $V(X)$ .
    - (b) (1 point) Calculer  $P(X = 7)$ .
  2. On tire sans remise. Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées.
    - (a) (1 point) Quelle loi suit  $X$ ?
    - (b) (1 point) Calculer  $P(X = k)$  pour  $0 \leq k \leq 20$ .

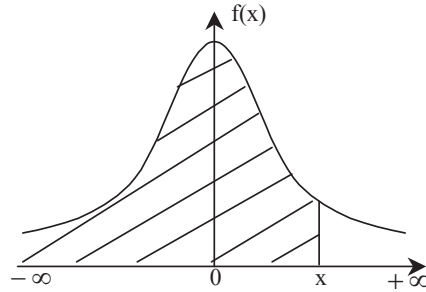
3. (3 points) Soit  $X \sim N(m, \sigma^2)$ . Montrer, à l'aide des tables de la loi normale, que  $P(m - \sigma < X < m + \sigma) \approx 0.68$ .

4. (4 points) Des études ont montré que en France le QI (Quotient Intellectuel) d'une personne suit une loi normale  $X \sim N(100, \sigma^2)$ .

1. (2 points) Sachant que le 16% des français ont un QI inférieur à 85, calculer  $\sigma^2$ .
2. (2 points) Dans cette question on admet  $\sigma^2 = 225$ . Une jeune fille veut intégrer une classe prépa dans un prestigieux lycée parisien. Ce lycée admet dans sa prépa que les personnes qui ont un QI dans le top 1% de la population française. Quel est le QI minimal que cette fille doit avoir pour intégrer la prépa ?

# Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921