Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.F.1/5009
Droit-Economie-Sciences Sociales ASSAS

Session:	Septembre 2019.
Année d'étude:	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline:	**Statistiques 3** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 1).
Titulaire du cours:	M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance quelconque.

Examen de Statistique 3 (5009): session septembre 2019

Exercice 1. (2,5 pts)
Répondre par vrai ou faux, sans justifier.
1. Une fonction de répartition est définie de l'intervalle $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Une fonction de répartition est décroissante.
3. Une fonction de répartition n'est jamais discontinue.
4. Dans le cas discret, pour un couple de variables aléatoires non-indépendantes, la loi conjointe (p_{ij}) peut s'obtenir à partir des lois marginales $(p_{i.})$ et $(p_{.j})$ par $p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j}$ pour tout i, j.
5. Si une v.a. X est continue et possède pour densité la fonctions f donnée par $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in [1,\ 2] \cup [3,\ 4]$, et $f(x) = 0$ sinon, alors $P(X \in [\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}]) \geq \frac{1}{4}$.

Exercice 2. (3 pts) (Donner les résultats numériques à 10^{-2} près : 2 chiffres après la virgule).
Un joueur effectue des tirages au sort indépendants avec remise de 8 boules à la fois d'une urne composée de 12 boules rouges et 18 noires. Les tirages sont effectués jusqu'à l'obtention de deux échantillons composés équitablement de 4 boules rouges et 4 noires (pas nécessairement successivement).
1. On note Z la v.a. qui compte le nombre de boules rouges dans un tirage.
(a) Donner la loi de Z.
(b) Donner la probabilité $P(Z = 4)$.
2. On note X la v.a. qui représente le nombre de tirages nécessaire pour obtenir les deux échantillons souhaités.
(a) Quelle est la loi de X?
(b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3. (2,5pts)
Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie en tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \begin{cases} \alpha e^{x}, & \text{si } x < 0, \\ e^{\frac{-1}{x+1}}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction G est-elle une fonction de répartition?
2. G est-elle une fonction de répartition pour $\alpha = 1$?
3. On fixe $\alpha = \frac{1}{e}$ et on considère une v.a. X ayant pour fonction de répartition G.
(a) Donner $P_X([-2,\ 2])$.
(b) Donner la densité de $Y = 2X$.

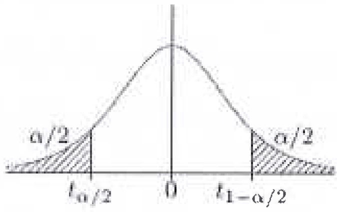
Exercice 4. (2pts)
1. Soit X une v.a. suivant T_{20}. Donner un intervalle contenant 90% des valeurs de $Y = \frac{X-2}{5}$.
2. Soit X et Y deux v.a. indépendantes. X suit $N(0, 2)$ et Y suit χ^2_9. Donner un intervalle contenant 90% des valeurs de $Y = 4\frac{X}{\sqrt{Y}}$.

TABLE 6. Table de la loi T de Student

Si T est une variable aléatoire suivant la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α fixé, la valeur $t_{1-\alpha/2}$ telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geqslant t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à ν degrés de liberté.



ν \ α	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Lorsque $\nu = \infty$, $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.