

Guy de la Brosse

Session : Septembre 2019

Année d'étude : Troisième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion parcours gestion

Discipline : *Techniques quantitatives de gestion*
(Unité d'Enseignements Fondamentaux 2)

Titulaire(s) du cours :

M. Mohamad AHMAD & M. Christophe CHOUARD

Document(s) autorisé(s) : Calculatrice.

Exercice 1 (4 points)

Au cours de l'année dernière, l'auto-école Gamma a présenté 175 candidats, 107 ont réussi. L'auto-école Bêta, concurrente récemment implantée dans le même quartier, a présenté 180 candidats dont 105 ont réussi.

- a) Peut-on en déduire que l'auto-école Gamma est plus efficace que l'auto-école Bêta au seuil de signification de 5 % ? utilisez l'approche par p-value (valeur p) et expliquez votre raisonnement à l'aide d'un graphique.
- b) Quelle est l'estimation par intervalle de confiance à 95% de l'écart entre les proportions de ces deux auto-écoles ?

Exercice 2 (6 points)

Pour déterminer s'il existait un lien entre l'allaitement maternel à la naissance et la pression artérielle dans l'enfance, une étude a consisté à mesurer la pression artérielle systolique à l'âge de 7 ans chez des enfants dont on savait s'ils avaient été allaités ou non. La pression artérielle systolique moyenne mesurée à 7 ans était de 98.5 mmHg (écart-type, 9.0) chez 5478 enfants qui avaient été allaités à la naissance et de 99.9 mmHg (écart-type, 9.6) chez 1125 enfants qui n'ont pas été allaités à la naissance. La pression artérielle systolique est une variable de distribution normale. Au de signification de 5 %, la pression artérielle systolique mesurée à l'âge de 7 ans diffère-t-elle en fonction de l'allaitement maternel à la naissance ? répondez avec trois méthodes différentes.

Exercice 3 (5 points)

Dans une procédure totalement aléatoire, sept unités expérimentales ont été utilisées pour chacun des cinq niveaux du facteur.

a) Compléter le tableau ANOVA suivant.

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen	F
Inter-groupes	300			
Intra-groupes				
Total	460			

b) Quelles sont les hypothèses de test implicites dans ce problème ?

c) Peut-on rejeter l'hypothèse nulle définie en (b), au seuil de signification $\alpha = 0,05$? utilisez l'approche par la valeur critique.

Exercice 4 (5 points)

La société Bêta a le choix entre deux projets d'investissement dont les caractéristiques sont les suivantes :

Type de projet	Projet A	Projet B
Durée	6 ans	8 ans
Dépenses d'investissement	120 000€	75 000€
Flux nets constants	30 000€	17 000€
Taux d'actualisation	6%	6%

En supposant que les projets peuvent être renouvelés à l'identique sur la même durée de vie, quel projet doit choisir la société Bêta ?

Formules Clé

Estimation ponctuelle	
Moyenne	$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$
Ecart-type	$S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$
Proportion	$P = \frac{X}{n}$
Distribution d'échantillonnage de \bar{X}	
Espérance mathématique de \bar{X}	$E(\bar{X}) = \mu$
Erreur type de \bar{X}	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Calcul de Z pour la distribution d'échantillonnage de \bar{X}	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Distribution d'échantillonnage p	
Espérance mathématique de p	$E(p) = \pi$
Erreur type de p	$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
Calcul de Z pour la distribution d'échantillonnage de la proportion p	$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$
Estimation par intervalle de confiance	
Intervalle de confiance de la moyenne d'une population (σ inconnu)	$\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$
Intervalle de confiance de l'écart entre les moyennes de deux populations : σ_1 et σ_2 sont inconnus	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
Intervalle de confiance de l'écart entre les moyennes de deux populations : échantillons appariés	$\bar{D} - t_{\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$
Intervalle de confiance de la proportion d'une population	$p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \pi \leq p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Intervalle de confiance de l'écart entre les proportions de deux population	$p_1 - p_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)^2}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)^2}{n_2}}$
Test d'hypothèses : la moyenne d'une population (σ inconnu)	
Statistique de test t	$t_{STAT} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$
Test d'hypothèses : la proportion d'une population	
Statistique de test Z	$Z_{STAT} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$

Test d'hypothèses : comparaison de moyennes de deux populations indépendantes : σ_1 et σ_2 sont inconnus

Statistique de test t	$t_{STAT} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ avec $\frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$ degrés de liberté
-----------------------	--

Test de comparaison de deux moyennes sur échantillons appariés

Statistique de test t	$t_{STAT} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$
-----------------------	---

Test de comparaison de deux proportions

Statistique de test Z	$Z_{STAT} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ où $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ $p_1 = \frac{X_1}{n_1}$ $p_2 = \frac{X_2}{n_2}$
-----------------------	---

ANOVA à un facteur

Variance inter-groupe	$VAR_{inter} = \frac{SCI}{K-1}$ où $SCI = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2$
-----------------------	---

Variance intra-groupe	$VAR_{intra} = \frac{SCE}{n_T - k}$ où $SCE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2$
-----------------------	---

Statistique de test F	$F = \frac{VAR_{inter}}{VAR_{intra}}$
-----------------------	---------------------------------------

ANOVA à deux facteurs (avec répétition d'expérience)

Statistique de test F pour le facteur A	$F_A = \frac{SCI_A / k - 1}{SCE / kh(g-1)}$
---	---

Statistique de test F pour le facteur B	$F_B = \frac{SCI_B / h - 1}{SCE / kh(g-1)}$
---	---

Statistique de test F pour l'interaction	$F_{AB} = \frac{SCI_{AB} / (k-1)(h-1)}{SCE / kh(g-1)}$
--	--

Mathématiques financières

Intérêt simple :

-L'intérêt est proportionnel au taux r et au nombre de périodes n

$$I = S_0 \times r \times n$$

$$S_n = S_0 \times (1 + r \times n)$$

-Si le nombre de périodes n'est pas un entier

$$I = S_0 \times r \times T$$

$$S_n = S_0 \times (1 + r \times T)$$

Intérêt composé :

Si la durée n'est pas un nombre entier

$$S_n = S_0 \times (1 + r)^n$$

$$S_n = [S_0 \times (1 + r)^a] \times (1 + r \times t)$$

- Méthode rationnelle

$$S_n = [S_0 \times (1 + r)^a] \times (1 + r)^t$$

- Méthode commerciale

- Mode de calcul de l'escompte

$$E = C \times r_e \times T$$

- Valeur actuelle d'un effet de commerce

$$S_0 = C \times (1 - r_e \times T)$$

Taux continu

$$S_n = S_0 \times e^{rT} \Leftrightarrow S_0 = S_n \times e^{-rT}$$

Taux proportionnels

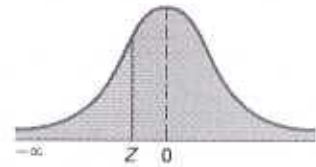
$$r_m = \frac{r_a}{m} \Leftrightarrow r_a = m \times r_m$$

Taux équivalents	$r_a = (1+r_m)^m - 1 \Leftrightarrow r_m = (1+r_a)^{1/m} - 1$
Valeur d'une série de capitaux à la date t = 0 (VP)	$VP = \frac{F_1}{(1+r)^1} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F_{t_n}}{(1+r)^{t_n}}$
Valeur actuelle nette (VAN)	$VAN = -F_0 + \frac{F_1}{(1+r)^1} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F_{t_n}}{(1+r)^{t_n}}$
Versements constants en fin de période	$Valeur\ capitalisée = a_f \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ $Valeur\ actualisée = a_f \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$
Versements constants en début de période	$Valeur\ capitalisée = a_f \times (1+r) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ $Valeur\ actualisée = a_f \times (1+r) \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$
Relations fondamentales	<ul style="list-style-type: none"> - Nominal de l'emprunt = Somme des amortissements - Annuité en n = Amortissement en n + Intérêts versés en n - Valeur actualisée des n annuités = Nominal de l'emprunt - Capital restant dû = Nominal de l'emprunt – Sommes déjà amorties
L'emprunt à annuités constantes	$Am_{t+1} = Am_t * (1+r)$ ou $Am_p = Am_t * (1+r)^{p-t}$ $C = Am_1 \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$
L'emprunt à annuités constantes :	
- Capital restant dû après le paiement d'une annuité a _t à terme échu	$c_t = x_0 \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^t}{(1+r)^n - 1}$
- Cumul du capital remboursé entre 2 périodes (t ₁ et t ₂)	$cumul\ capital = x_0 \times \frac{(1+r)^{t_2} - (1+r)^{t_1-1}}{(1+r)^n - 1}$
- Intérêts versés en période t	$I_t = r \times x_0 \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^{t-1}}{(1+r)^n - 1}$
- Cumul des intérêts versés entre 2 périodes (t ₁ et t ₂)	$Cumul\ Intérêts = x_0 \times \frac{r \times (t_2 - t_1 + 1) \times (1+r)^n + (1+r)^{t_1-1} - (1+r)^{t_2}}{(1+r)^n - 1}$
L'emprunt à amortissements constants	$Amortissement = \frac{Capital}{Nombre\ de\ périodes}$ $A_n = Amortissement * (1+r)$ $A_1 = Amortissement * (1+n.r)$
Délai de récupération (DR)	$DR = K-1 + \frac{I_0 - S_{k-1}}{S_k - S_{k-1}}$ ou $DR = K-1 + \frac{0 - D_{k-1}}{D_k - D_{k-1}}$
Indice de profitabilité	$IP = 1 + \frac{VAN(r\%)}{I_0}$

TABLE E.2

The Cumulative Standardized Normal Distribution

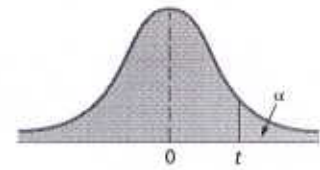
Entry represents area under the cumulative standardized normal distribution from $-\infty$ to Z



Cumulative Probabilities										
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-6.0	0.00000001									
-5.5	0.00000019									
-5.0	0.000000287									
-4.5	0.000003398									
-4.0	0.000031671									
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00103	0.00100
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2388	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2482	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

TABLE E.3
Critical Values of *t*

For a particular number of degrees of freedom, entry represents the critical value of *t* corresponding to the cumulative probability ($1 - \alpha$) and a specified upper-tail area (α).



Degrees of Freedom	Cumulative Probabilities					
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
	Upper-Tail Areas					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778

TABLE E.3
Critical Values of *t* (continued)

For a particular number of degrees of freedom, entry represents the critical value of *t* corresponding to the cumulative probability $(1 - \alpha)$ and a specified upper-tail area (α).

Degrees of Freedom	Cumulative Probabilities					
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
	Upper-Tail Areas					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	0.6772	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	0.6772	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	0.6771	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	0.6771	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	0.6771	1.2905	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286
96	0.6771	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	0.6770	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	0.6770	1.2902	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	0.6770	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	0.6765	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174
∞	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

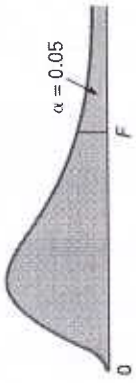


TABLE E.5
Critical Values of *F*

For a particular combination of numerator and denominator degrees of freedom, entry represents the critical values of *F* corresponding to the cumulative probability (1 - α) and a specified upper-tail area (α).

		Cumulative Probabilities = 0.95																		
		Upper Tail Area = 0.05																		
		Numerator, <i>df</i> ₁																		
Denominator, <i>df</i> ₂		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.40	199.50	215.70	224.60	230.20	234.00	236.80	238.90	240.50	241.90	243.90	245.90	248.00	249.10	249.10	250.10	251.10	252.20	253.30	254.30
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	8.52	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.00	2.97	2.93	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	1.00

(continued)