Université Paris II Statistiques 4 (5289)
L2 Sciences Économiques et Gestion Cours de M[me] Chevalier

Juin 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer. Le sujet est noté sur 11.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais commencez si possible chaque exercice en haut d'une nouvelle page de votre copie et pensez à numéroter les pages.

Exercice 1 (5 points)

Le responsable d'une chaîne de montage souhaite évaluer le nombre de dysfonctionnements par jour des machines utilisées par les employés. On suppose que ce nombre de dysfonctionnements peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel positif inconnu que l'on cherche à estimer :

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Le nombre de dysfonctionnements observés par jour pendant n journées choisies au hasard fournit ainsi un échantillon $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de la variable aléatoire X.

1. Construction d'un estimateur du paramètre λ
   (a) Montrer qu'un estimateur T_n de λ construit par la méthode des moments est $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$.
   (b) Montrer que l'estimateur de λ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n.
   (c) Montrer que l'information de Fisher est égale à $\mathrm{I}_n(\lambda) = n/\lambda$.
   (d) Donner la définition d'un estimateur sans biais et d'un estimateur convergent. L'estimateur T_n vérifie-t-il ces propriétés ?
   (e) Est-il efficace ?
   (f) Sur une période d'observation de $n = 400$ jours, les observations $(x_1, \dots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1600$. Donner l'estimation de λ obtenue avec ces valeurs.
2. Construction d'un intervalle de confiance pour le paramètre λ
   (a) Quelle approximation peut-on utiliser pour la loi de T_n si n est suffisamment grand ?
   (b) En déduire un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre λ.
   Indication : on remplacera pour cela l'écart-type de la variable X *dans les bornes de l'intervalle par un estimateur.*
   (c) On choisit un seuil de confiance $1 - \alpha = 90\%$. On rappelle que sur une période de $n = 400$ jours, les observations $(x_1, \dots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1600$. Donner la réalisation de l'intervalle de confiance obtenue avec ces valeurs (en arrondissant à deux chiffres après la virgule).
   Indication : on rappelle que $\sqrt{100} = 10$.

Exercice 2 (2 points)

Une entreprise de recyclage chargé du traitement des vieux ordinateurs portables utilise un appareil capable de détecter les batteries usagées. Cet appareil n'est pas très fiable, mais avant d'investir dans un nouveau modèle, le responsable de l'entreprise souhaite connaître la proportion p de batteries défaillantes que l'appareil arrive à identifier correctement. Pour cela, il utilise un lot de 100 batteries hors d'usage et les fait tester à l'appareil, qui en considère seulement 80 comme usagées.

On définit la suite (X_n) de variables aléatoires telles que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{X}_n = 1$ si la n^{e} batterie est hors d'usage et $\mathrm{X}_n = 0$ sinon. On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) = p$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) = 1 - p$. Les batteries testées étant choisies indépendamment, on peut donc considérer que, pour tout $n \geqslant 1$, $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est un échantillon d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p, autrement dit telle que pour tout $k \in \{0, 1\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = p^k(1 - p)^{1-k}$.

1. Montrer qu'un estimateur de p obtenu par la méthode des moments est $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$.
2. Montrer qu'un estimateur du maximum de vraisemblance de p est également T_n.
3. Montrer que T_n est sans biais et convergent.
4. On admet que l'information de Fisher vaut $\dfrac{n}{\theta(1-\theta)}$. Montrer que T_n est efficace.
5. Donner une estimation du paramètre p.

Exercice 3 (2,5 points)

1. On considère la suite $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ de v.a. indépendantes et de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}x + \dfrac{n-2}{2n} & \text{si } x \in [\,0\,;2\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer la convergence en loi de la suite (X_n) vers une variable X dont on précisera la loi.

2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 10. On considère la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n \geqslant 1}$ de v.a. définie par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i}{2n} + 7$$

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer Z_n en fonction de $\overline{\mathrm{Y}}_n$.

   (b) Montrer que la suite $(\overline{\mathrm{Y}}_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers un réel y que l'on précisera.

   (c) En déduire la convergence en probabilité, puis en loi, de la suite (Z_n) vers la v.a. constante en 12. On citera précisément les théorèmes utilisés.

3. En déduire la convergence en loi de la suite $(\mathrm{X}_n + \mathrm{Z}_n)$ vers la variable $\mathrm{T} = \mathrm{X} + 12$.

Exercice 4 (1,5 points)

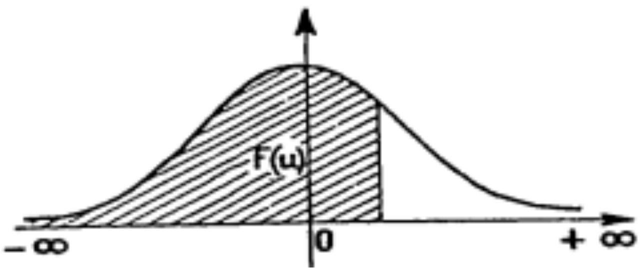
Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, dont la loi est donnée par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 0) = 1 - 1/n \\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n) = 1/n \\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = 0 \text{ si } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

On admet que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = 1$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{Y}_n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.
2. Montrer qu'elle ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple pour u = 1,37 F(u) = 0,9147
pour u = -1,37 F(u) = 0,0853