

<b>Session :</b>	Mai 2019.
<b>Année d'étude :</b>	Première année de licence économie-gestion mention économie et gestion.
<b>Discipline :</b>	<i>Statistiques 2</i> (Unité d'Enseignements Fondamentaux 2).
<b>Titulaire du cours :</b>	M. Lorenzo BASTIANELLO.
<b>Document(s) autorisé(s) :</b>	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

*Examen de Statistiques 2 (5299)***Indications et consignes :**

- La qualité de la présentation et la tenue de la copie peuvent faire l'objet de points négatifs.
- Toutes communications, quelle que soit leur nature, sont interdites.
- *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.*

1. (4 points) Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $A, B \in \mathcal{A}$

1. (1 point) Montrer avec un dessin que  $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$
2. (1 point) Montrer avec un dessin que  $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$
3. (2 points) Montrer que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. (5 points) Soit  $Z$  une variable aléatoire discrète avec image  $Z(\Omega) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ , où  $z_i \in \mathbb{N}$ ,<sup>1</sup>  $i = 1, \dots, 4$ . On note  $p_i = P(Z = z_i)$  la probabilité que  $Z$  prenne la valeur  $z_i$ .

1. (1 point) Sachant que  $p_4 = \frac{1}{3}$ , trouver  $\sum_{i=1}^3 p_i$ .
2. (1 point) Donner la définition d'espérance  $\mathbb{E}(Z)$ .
3. (1 point) Est-ce que  $\mathbb{E}(Z) \in \mathbb{N}$ ? Si oui, justifier pourquoi, sinon donner un contre-exemple.
4. (2 points) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  montrer que  $\mathbb{E}(aZ + b) = a\mathbb{E}(Z) + b$ .

3. (11 points) Un viticulteur est spécialisé dans la production de vin blanc. Il utilise comme raisins le Sauvignon et le Chardonnay.

3.a. Le viticulteur possède trois vignes, avec trois appellations AOC : V1, V2 et V3. Le 70% du total de la production provient de la vigne V1, le 10% de V2 et le reste de V3. Dans la vigne V1 le 30% des raisins est du Sauvignon (et le reste du Chardonnay), dans V2 le 50% est du Sauvignon (et le reste du Chardonnay) et dans V3 le 90% est du Sauvignon (et le reste du Chardonnay).

Un client boit un verre de vin produit avec les raisins du viticulteur (le viticulteur ne mélange jamais le Sauvignon et le Chardonnay).

1. (1.5 points) Quelle est la probabilité que ça soit du Chardonnay?

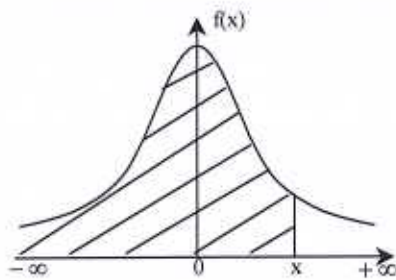
---

1.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

2. (1.5 points) Sachant que le client a bu du Sauvignon, calculer la probabilité qu'il provienne de la vigne V1.
- 3.b) Le vin est commercialisé en tonneau. Les tonneaux sont de types différentes mais leur capacité (en litres) peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 250$  et d'écart-type  $\sigma$ .
1. (1 point) On donne  $P(X \leq 237) = 0.14$ . Calculer la probabilité de l'évènement "la capacité du tonneau est comprise entre 237 et 263 litres".
  2. (1 point) On note  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = \frac{X-250}{\sigma}$ . Quelle est la loi de  $Y$  ?
  3. (2 point) Montrer que  $P\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0.14$ .
  4. (2 points) En déduire la valeur de  $\sigma$  arrondie à l'entier.
  5. (2 points) Dans cette question, on admet que  $\sigma$  vaut 12. On désigne par  $\alpha$  un réel. Un tonneau est conforme si sa capacité en litres se trouve dans l'intervalle  $[250 - \alpha; 250 + \alpha]$ . Déterminer la valeur de  $\alpha$  pour qu'un tonneau soit conforme avec probabilité égale à 95%.

## Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8105	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921