Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) 2° sem/5204
Droit-Economie-Sciences Sociales ASSAS

Session:	Mai 2019.
Année d'étude:	Magistère Banque-Finance première année.
Discipline:	**Probabilités** (structure 2° semestre).
Titulaire du cours:	M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice NON autorisée. Téléphone portable NON autorisé. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance quelconque.

Examen de Probabilités (5204): session mai 2019, durée 3h.

Exercice 1. (6 pts)
I. Posons $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la loi uniforme (équiprobabilité) P. Considérons les v.a. suivantes $Y, Z, X : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$Y(a) = Y(b) = 1,\ Y(c) = Y(d) = Y(e) = 0,$$

$$Z(a) = Z(b) = Z(e) = 2,\ Z(c) = Z(d) = -1,$$

$$X(a) = 10, X(b) = 20, X(c) = 30, X(d) = 40, \text{ et } X(e) = 50.$$

1. Donner $\sigma(Y, Z)$.
2. Décrire les v.a. mesurables par rapport à $\sigma(Y, Z)$.
3. La v.a. X est-elle mesurable par rapport $\sigma(Y, Z)$?
4. Si une v.a. W est mesurable pour $\sigma(Y, Z)$, le sera-t-elle pour $\sigma(Y)$? Le contraire est-il vrai? justifier si la réponse est affirmative, ou donner un contre-exemple si elle est négative.

II. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ et $\mathcal{F}_0$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soient, en outre, X, Y, Z et W des v.a. réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. On supposera que $E(|X|) < +\infty$.
Justifier les équations et propriétés suivantes :

a) $E(X|\sigma(X)) = X$.

b) $E[E[E(X|\sigma(Y, Z, W)]|\sigma(Z, W)]|\sigma(W)] = E(X|W)$.

c) $E(X.1_{Y>0} + X.1_{Y\leq 0}|\mathcal{F}_0) = E(X|\mathcal{F}_0)$, si Y est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

d) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On supposera que $E(|X_n^2|) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (4 pts)
Considérons deux v.a. X et Y telles que $X \rightsquigarrow \mathfrak{B}(n, p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathfrak{B}(X, \mu)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, \mu \in [0, 1]$.
1. Donner $E(Y|X)$ et $E(Y^2|X)$.
2. En déduite E(Y) et V(Y). Que remarquez-vous? (i.e., quelle est la loi possédant l'espérance et la variance trouvées?).
3. Application. Un jeu consiste à lancer, premièrement 10 fois une pièce de monnaie équilibrée, noter par k le nombre de faces obtenues, et lancer deuxièmement un dé à 6 faces (numérotée de 1 à 6) équilibré k fois. On gagne m€, où m est le nombre de 1 obtenus à la deuxième expérience.
Donner l'espérance et la variance des gains.

Exercice 3. (3 pts) On considère un couple aléatoire (X, Y) suivant la loi uniforme sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq 1\}$.
Calculer $E(X|Y)$.

Exercice 4.(6 pts) Deux joueurs A et B jouent à pile ou face. Le joueur A donne (resp. reçoit) 1 euros si face apparaît (resp. si pile apparaît). Le jeu est répété plusieurs fois : on note alors par $X = (X_n)_{n\geq 1}$, $X_n \in \{-1, 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli B(1/2) définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'évènement $X_n = 1$ signifie que pile est apparu au $n^{\text{ième}}$ lancer de la pièce. On note $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$, la richesse du joueur A aux lancers correspondants. On supposera que les richesses initiales des deux joueurs sont toutes les deux de 10€ chacune. Dans un premier temps nous pouvons supposer que le jeu continue même si l'un des joueurs n'a plus d'argent, –il empruntera à taux 0–

1. Exprimer Y_n en fonction des X_i.

2. Après chaque lancer, les joueurs connaissent la valeur obtenue aux lancers précédents, leur information peut donc être modélisée par la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, 1 \leq k \leq n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

3. Supposons que les joueurs décident de s'arrêter au temps d'arrêt T donné par

$$T = inf\{n \geq 2 : X_{n-1} = X_n\}.$$

a) Interpréter le temps T.

b) Montrer que T est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

c) Montrer que $(Y_{n\wedge T})_{n\geq 1}$ est bornée.

d) Montrer que $P(T < +\infty) = 1$.

e) Donner $E(Y_T)$.

Exercice 5. (2 pts) Considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{-1,\ 1\}$, indépendantes, suivant la même loi et sont toutes de même espérance $\mu > 0$. On donne une suite de v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélisant la fortune d'un joueur à un jeu donné, définie comme suit: $Y_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n, \text{ si } Y_n < 0, \\ \frac{X_{n+1}}{\mu} Y_n - \mu, \text{ si } Y_n \geq 0. \end{cases}$$

(où, $\mu = E(X_n)$, $n \geq 1$.)
Considérons la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, pour $n \geq 1$. On posera $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale.