	UNIVERSITE PARIS 2 PANTHEON-ASSAS
Session	Janvier 2019
Année d'étude	Troisième année de licence économie-gestion mention sciences économiques
Discipline	Statistique 5 - 5385
Titulaire du cours	Mme Morhaim
Durée	1h30
Documents et matériel autorisé	la caculatrice est autorisée

Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1

Une entreprise vend un liquide industriel en contenants de 100 litres. La limite supérieure légale d'un additif A par 100 litres de ce liquide a été fixée à 80 ml. Une nouvelle technique permet de fabriquer ce liquide en diminuant la quantité de cet additif. On effectue le dosage de 100 contenants. On suppose que la quantité de l'additif A (en ml) suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type 4. Dans l'échantillon, on a trouvé une moyenne $\overline{X} = 81$ ml.

1) Ecrire la vraisemblance de l'échantillon.

2) On considère le test $\begin{cases} (H_0) \\ (H_1) \end{cases}$. Définir les risques α et β respectivement de 1ère et de 2ème espèce.

3) On considère le test $\begin{cases} (H_0) & m = 80 \\ (H_1) & m = 82 \end{cases}$

3a) D'après le théorème de Neyman-Pearson, construire la région critique du test au risque de 1ère espèce $\alpha = 0,04$.

3b) Que conluez-vous ?

3c) Calculer le risque β de 2ème espèce.

3d) Quelle doit être la taille optimale de l'échantillon si on veut que $\alpha = \beta = 0,02$?

4) On considère le test $\begin{cases} (H_0) & m = 80 \\ (H_1) & m > 80 \end{cases}$

4a) Quelle est la région critique au sens de Neyman-Pearson au risque de 1ère espèce $\alpha = 0,04$?

4b) Ce test est-il UPP ?

5) On considère le test $\begin{cases} (H_0) & m = 80 \\ (H_1) & m \neq 80 \end{cases}$

5a) Construire un test raisonable au risque de 1ère espèce $\alpha = 0,08$.

5b) Ce test est-il UPP ?

6) On considère le test $\begin{cases} (H_0) & m \leq 80 \\ (H_1) & m > 80 \end{cases}$

6a) Contre quel risque se protège-t-on alors en priorité ?

6b) Enoncer le théorème de Lehmann.

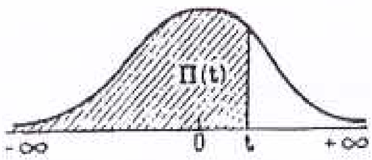
6c) Construire la région critique du test au seuil $\alpha = 0,04$.

6d) Que concluez-vous ?

Exercice 2

On a relevé le montant mensuel (en euros) des dépenses pour l'achat d'un bien pour un échantillon de clients. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de cette variable dans la population. Tester au seuil 0,05, à l'aide d'un test du khi-deux, l'ajustement à une loi normale dont les paramètres sont ceux estimés précédemment.

dépense (en euros)	[0,20[	[20,30[	[30,60[	[60,80[	[80,120[	[120,140[
nombre de clients	6	21	32	38	10	8



Fonction de répartition
de la loi de Laplace-Gauss

Probabilité d'une valeur inférieure à t :

$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0.5199	0.5239	0,5279	0,5319	0,5359
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0.5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0.5793	0,5832	0,5871	0,5910	0.5948	0.5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0.3	0,6179	0.6217	0,6255	0,6293	0.6331	0.6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0.6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0.6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0.6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0.7088	0.7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0.7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0.7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0.7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0.7910	0,7939	0.7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0.8186	0,8212	0,8238	0.8264	0.8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0.8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0.8643	0,8665	0.8686	0,8708	0.8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0.8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0.9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0.9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = -1.37$ $\Pi(t) = 0.9147$
pour $t = 1.37$ $\Pi(t) = 0.0853$.

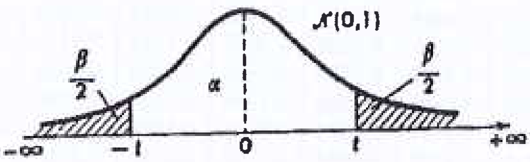
TABLE DE LA LOI NORMALE, CENTRÉE, RÉDUITE $\mathcal{N}(0,1)$
(DITE TABLE DE L'ÉCART-RÉDUIT)

La table donne la probabilité β pour que l'écart-réduit Z égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée t, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-t, +t)$.

$$\beta = 1 - \alpha$$

ou

$$\alpha = \Pr\{-t \leqslant Z \leqslant +t\}$$



$$\beta = 2[1 - \Pi(t)]$$

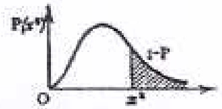
β	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,064	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité β s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Ex : Pour $Z = 1{,}96$ la probabilité est $\beta = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

TABLE POUR LES PETITES VALEURS DE β

β	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
Z	3,290 53	3,890 59	4,417 17	4,891 64	5,326 72	5,730 73	6,109 41



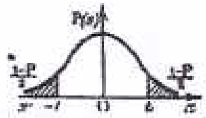
LOI DU χ^2. — Valeurs de χ^2 ayant la probabilité $1 - P$ d'être dépassées.

ν \ $1-P$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001
1		0,000 2	0,001 0	0,003 9	0,015 8	0,064 2	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,010 0	0,020 1	0,050 6	0,103	0,211	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,071 7	0, 115	0,216	0,352	0,584	1,01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,59	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Observation. — Lorsque $\nu > 30$ on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu} - 1$ suit une loi normale réduite.

LOI DE STUDENT-FISCHER.

Valeurs (absolues) de t ayant la probabilité $1 - P$ d'être dépassées.

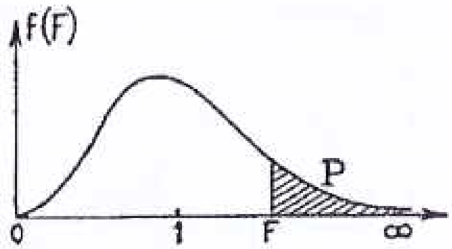


t \ $1-P$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,767	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	3,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,392	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	0,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,289	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,282	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,313	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,311	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,310	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,303	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,296	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

TABLE DE DISTRIBUTION DE *F*

(Variable de Snedecor ou de Fisher)

Valeurs de F ayant la probabilité $P = 0{,}05$ d'être dépassées $\left(F = s_1^2 / s_2^2\right)$

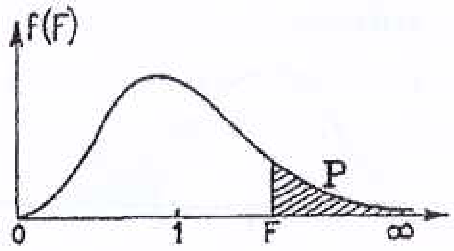


ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	161,4	199,5	215,7	224,6,	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41
3	1,013	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07
10	4,94	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75

TABLE DE DISTRIBUTION DE *F*

(Variable de Snedecor ou de Fisher)

Valeurs de *F* ayant la probabilité $P = 0{,}05$ d'être dépassées $\left(F = s_1^2 / s_2^2\right)$



ν_2 \ ν_1	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,51	3,41	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,11	2,01	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00