Université Paris II | Statistiques 4 (5289)

L2 Sciences Économiques et Gestion | Cours de M$^{\text{me}}$ Chevalier

Septembre 2022

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer. Le sujet est noté sur 11.

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais commencez si possible chaque exercice en haut d'une nouvelle page de votre copie et pensez à numéroter les pages.

Exercice 1 (2 points)

1. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 3}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, dont la loi est donnée, pour tout $n \geqslant 6$, par

i	0	1	2	3	4	k (si $k \geqslant 5$)
$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i)$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{n^2}$	0

   Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable X dont on précisera la loi.

2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 5. On considère la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. définie par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} 3\mathrm{Y}_i}{n} + 4$$

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer Z_n en fonction de $\overline{\mathrm{Y}}_n$.

   (b) Montrer que la suite $(\overline{\mathrm{Y}}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers un réel y que l'on précisera.

   (c) En déduire la convergence en probabilité, puis en loi, de la suite (Z_n) vers la v.a. constante en 19. On citera précisément les théorèmes utilisés.

Exercice 2 (3,5 points)

Afin d'optimiser la fréquence des moyens de transports, le service municipal d'une ville souhaite estimer le temps d'attente moyen aux arrêts de bus de l'une des principales lignes. Pour cela, on considère que le temps d'attente en minutes peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ où θ est un réel inconnu strictement positif. Rappelons que sa densité est égale à

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta \times \mathrm{e}^{-x/\theta} & \text{si } x \in [\,0\,;+\infty\,[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le temps d'attente de n usagers choisis au hasard fournit donc un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable aléatoire X.

1. Montrer que $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$ est un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Montrer que l'estimateur de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n.
3. Montrer que l'information de Fisher est égale à $\mathrm{I}_n(\theta) = n/\theta^2$.
4. Donner la définition d'un estimateur sans biais et d'un estimateur convergent. L'estimateur T_n vérifie-t-il ces propriétés ?
5. Est-il efficace ?

Exercice 3 (1 points)

Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, dont la loi est donnée par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 0) = 1 - 1/n \\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n) = 1/n \\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = 0 \text{ si } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

On admet que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = 1$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{Y}_n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.
2. Montrer qu'elle ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 4 (4,5 points)

Le responsable d'une chaîne de montage souhaite évaluer le nombre de dysfonctionnements par jour des machines utilisées par les employés. On suppose que ce nombre de dysfonctionnements peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel positif inconnu que l'on cherche à estimer :

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Le nombre de dysfonctionnements observés par jour pendant n journées choisies au hasard fournit ainsi un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable aléatoire X.

1. Construction d'un estimateur du paramètre λ
   (a) Montrer qu'un estimateur T_n de λ construit par la méthode des moments est $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$.
   (b) Montrer que l'estimateur de λ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n.
   (c) Montrer que l'information de Fisher est égale à $\mathrm{I}_n(\lambda) = n/\lambda$.
   (d) L'estimateur T_n est-il sans biais ? Est-il convergent ?

(e) Est-il efficace ?

(f) Sur une période d'observation de $n = 500$ jours, les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2500$. Donner l'estimation de λ obtenue avec ces valeurs.

2. Construction d'un intervalle de confiance pour le paramètre λ

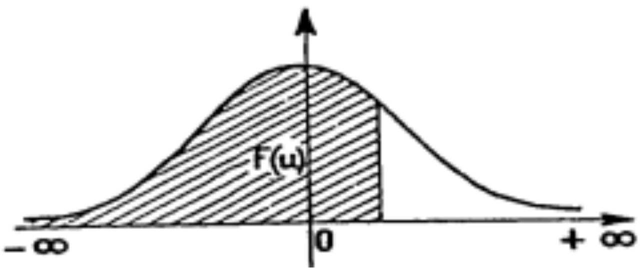
(a) En utilisant le théorème central limite, déterminer la loi approchée de T_n si n est suffisamment grand. On n'oubliera pas de donner les hypothèses de ce théorème.

(b) En déduire un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre λ.

Indication : on pourra remplacer l'écart-type de la variable X *dans les bornes de l'intervalle par un estimateur.*

(c) On choisit un seuil de confiance $1 - \alpha = 95\%$. On rappelle que sur une période de $n = 500$ jours, les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2500$. Donner la réalisation de l'intervalle de confiance obtenue avec ces valeurs (en arrondissant à deux chiffres après la virgule).

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple   pour u = 1,37   F(u) = 0,9147
             pour u = -1,37   F(u) = 0,0853