

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

### Exercice 1

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = x_1(2 - x_2^2) \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
- Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
- Montrer que ces conditions sont nécessaires.
- Résoudre le problème.

### Exercice 2

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser } \int_0^2 [ -\dot{x}^2(t) - 4x^2(t) + 4tx(t) + x(t)\dot{x}(t) ] dt - x^2(2)$$

$$x(0) = 0$$

- Quelles sont les conditions nécessaires du premier ordre?
- Trouver le(s) candidat(s).
- Résoudre le problème.

### Exercice 3

On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } \int_0^1 -\frac{1}{2}v^2(t)dt + x(1) \\ \dot{x}(t) = 2x(t) + v(t) \\ x(0) = 0, \quad v(t) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- Ecrire le Hamiltonien du problème.
- Ecrire l'équation adjointe, le principe du maximum de Pontryagin et la condition de transversalité.
- Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.
- Résoudre le système.
- Résoudre le problème de contrôle optimal.
- Ecrire le problème initial sous forme d'un problème de calcul des variations (sans le résoudre).