

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \end{cases}$$

- Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
- Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
- Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} \\ & x_1^2 + 2x_2^2 \leq 16 \end{cases}$$

- Montrer que ce problème admet une solution.
- Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
- Montrer que ces conditions sont nécessaires.
- Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A admet 3 valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = -4$.
- Que vaut le déterminant de A ?
- Que vaut le déterminant de B en fonction du déterminant de A ?
- Expliquer pourquoi B admet les valeurs propres $\tilde{\lambda}_1 = 1$, $\tilde{\lambda}_2 = -1$ et $\tilde{\lambda}_3 = -2$.
- Pourquoi A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).
- Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' & = 2y_1 + 6y_2 - 6y_3 \\ y_2' & = 4y_1 + 2y_2 - 4y_3 \\ y_3' & = 4y_1 + 6y_2 - 8y_3 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$.

- Résoudre le système différentiel linéaire.