

Université PANTHEON-ASSAS (PARIS II)

Assas

Session : Septembre 2018

Année d'étude : Première année de Master économie-gestion mention ingénierie économique et statistique

Discipline : Théorie des Jeux coopératifs (4469) UEF 2

Titulaire du cours : Professeur Lucie Ménager

Documents : Calculatrice non scientifique autorisée, documents non autorisés.

Justifiez toutes vos réponses. Soyez clairs. Ne négligez pas le soin.

Exercice 1 Soit (N, v) un jeu coalitionnel.

1. Donnez les définitions d'un jeu (N, v) a) positif, b) superadditif, c) monotone.
2. Montrez qu'un jeu superadditif et positif est monotone.
3. Montrez que dans un jeu sur-additif, la valeur de Shapley satisfait la rationalité individuelle, c'est-à-dire que $\forall i, \Phi_i(v) \geq v(\{i\})$.

Exercice 2 Soient deux agents voulant se partager 3 euros. S'ils échouent, ils ont chacun 1 euro. Les fonctions d'utilité des joueurs sont $u_1(x) = x$ et $u_2(x) = \frac{x}{2} + 1$.

1. Modélisez ce problème comme un jeu de négociation (\mathcal{U}, d) .
2. Représentez \mathcal{U} dans le plan (v_1, v_2) .
3. Donnez la solution de Nash (v_1^N, v_2^N) et le partage associé (x_1^N, x_2^N) .
4. Représentez graphiquement la solution de Kalai-Smorodinsky.
5. Déterminez la solution de Kalai-Smorodinsky (v_1^{KS}, v_2^{KS}) et le partage associé (x_1^{KS}, x_2^{KS}) .

Exercice 3 Soient deux consommateurs voulant acheter des avocats. Le consommateur 1 veut acheter 2 avocats, le consommateur 2 seulement 1 avocat. Chaque consommateur i retire une

utilité de 2 de la consommation d'un avocat. Le prix d'un avocat est de 1 euro, avec une promotion de "3 avocats pour le prix de 2", c'est-à-dire 2 euros les 3.

1. En supposant que la valeur créée par une coalition est la somme des utilités retirées moins le prix total payé par les membres de la coalition, modélisez cette situation sous la forme d'un jeu coalitionnel.
2. Calculez la valeur de Shapley de chaque consommateur.
3. Déduisez-en le prix que doit payer chaque consommateur pour bénéficier de la promotion.
4. En termes de prix unitaire payé, quel consommateur bénéficie le plus de la coalition ? Interprétez.

Exercice 4 Le conseil de sécurité des Nations Unies est composé de 5 membres permanents, la Chine, la France, les Etats Unis, le Royaume uni et la Russie et 10 membres non permanents élus pour deux ans et renouvelés. Jusqu'au 31/12/2008, les 10 membres non permanents sont : l'Afrique du Sud, le Burkina Faso et la Lybie pour l'Afrique, l'Indonésie et le Viet-nam pour l'Asie, le Costa Rica et le Panama pour l'Amérique Latine et la Belgique, la Croatie et l'Italie pour l'Europe. Chaque membre du conseil de sécurité dispose d'une voix. La règle de décision est la suivante :

Les décisions du Conseil de sécurité sont prises par un vote affirmatif de neuf de ses membres dans lequel sont comprises les voix de tous les membres permanents. (article 27, alinéa 3)

1. Déterminez les poids q_i de chaque membre du conseil de sécurité et un quota Q pour que le jeu associé soit un jeu de vote pondéré.
2. De quel pouvoir disposent les membres du conseil de sécurité ?
3. Trouvez la valeur de Shapley des membres du conseil de sécurité.

Exercice 5 Le mécanisme d'affectation des élèves aux lycées utilisé à Boston avant 2006 était le suivant :

- Etape 0 : les élèves classent les lycées par ordre de préférence décroissant (le lycée préféré est classé en premier).
- Etape 1 : Seuls les premiers choix des étudiants sont considérés. Chaque lycée considère les demandes issues d'un premier choix et accepte les élèves selon leur priorité jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place ou plus d'élève l'ayant classé en premier. Toute affectation est définitive.
- Etape 2. On considère les étudiants restants. Chaque lycée n'ayant pas atteint ses capacités maximales considère les demandes issues d'un second choix et accepte les élèves

selon sa priorité jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place ou plus d'élève l'ayant classé en second. Toute affectation est définitive.

- etc...

Considérons le cas particulier suivant : il y a trois élèves (s_1, s_2, s_3) et 3 lycées (c_1, c_2, c_3), et chaque lycée n'a qu'une seule place. Les préférences sont :

Elèves	Collèges
$c_2 \succ_{s_1} c_1 \succ_{s_1} c_3$	$s_1 \succ_{c_1} s_3 \succ_{c_1} s_2$
$c_1 \succ_{s_2} c_2 \succ_{s_2} c_3$	$s_2 \succ_{c_2} s_1 \succ_{c_2} s_3$
$c_1 \succ_{s_3} c_2 \succ_{s_3} c_3$	$s_3 \succ_{c_3} s_1 \succ_{c_3} s_2$

1. Déterminez l'appariement résultant de la procédure de Boston.
2. Montrez que cette procédure est manipulable, car l'un des élèves a intérêt à déclarer un faux premier choix.
3. Montrez qu'en partant de l'appariement de Boston déterminé à la question 1, on peut améliorer la situation des collèves en appliquant une procédure de Top Trading Cycle.
4. Quelle procédure pouvez vous conseiller à la mairie de Boston pour avoir un appariement stable et non manipulable par les élèves ?
5. Donnez l'appariement résultant de cette procédure.

