

Université PANTHEON-ASSAS (PARIS II)

Assas

Session : Mai 2018

Année d'étude : Première année de Master économie-gestion mention ingénierie économique et statistique

Discipline : Théorie des Jeux coopératifs (**4469**) UEF 2

Titulaire du cours : Professeur Lucie Ménager

Documents : Calculatrice non scientifique autorisée, documents non autorisés.

Justifiez toutes vos réponses. Soyez clairs. Ne négligez pas le soin.

Exercice 1 Soit (\mathcal{U}, d) un jeu problème de négociation. On rappelle qu'une solution de négociation est une fonction ψ qui associe à tout problème (\mathcal{U}, d) un élément unique $\psi(\mathcal{U}, d)$ de \mathcal{U} .

1. Énoncez et interprétez les définitions suivantes :
 - (a) ψ satisfait la Pareto optimalité (**PAR**);
 - (b) ψ satisfait la symétrie (**SYM**);
 - (c) ψ satisfait l'invariance aux représentations équivalentes de utilités (**INV**);
 - (d) ψ satisfait l'indépendance aux alternatives non pertinentes (**IIA**);
2. Définissez la solution de Nash $\psi^N(\mathcal{U}, d)$.
3. Démontrez que ψ^N satisfait **PAR**, **SYM**, **INV** et **IIA**.

Exercice 2 Soient deux agents voulant se partager 4 euros. S'ils échouent, ils ont chacun 0. Les fonctions d'utilité des joueurs sont $u_1(x) = x$ et $u_2(x) = \frac{x}{2} + 1$.

1. Modélisez ce problème comme un jeu de négociation (\mathcal{U}, d) .
2. Représentez \mathcal{U} dans le plan (v_1, v_2) .

3. Donnez la solution de Nash (v_1^N, v_2^N) et le partage associé (x_1^N, x_2^N) .
4. Représentez graphiquement la solution de Kalai-Smorodinsky.
5. Déterminez la solution de Kalai-Smorodinsky (v_1^{KS}, v_2^{KS}) et le partage associé (x_1^{KS}, x_2^{KS}) .

Exercice 3 Soient deux consommateurs voulant acheter des avocats. Le consommateur 1 veut acheter 2 avocats, le consommateur 2 seulement 1 avocat. Chaque consommateur i retire une utilité u_i de la consommation d'un avocat. Le prix d'un avocat est de 1 euro, avec une promotion de "3 avocats pour le prix de 2", c'est-à-dire 2 euros les 3.

1. En supposant que la valeur créée par une coalition est la somme des utilités retirées moins le prix total payé par les membres de la coalition, modélisez cette situation sous la forme d'un jeu coalitionnel.
2. Calculez la valeur de Shapley de chaque consommateur.
3. Déduisez-en le prix que doit payer chaque consommateur pour bénéficier de la promotion.
4. En termes de prix unitaire payé, quel consommateur bénéficie le plus de la coalition ? Interprétez.

Exercice 4 Considérons un groupe de 3 joueurs. Supposons que 3 joueurs peuvent obtenir un paiement de 1 s'ils forment la grande coalition. Le surplus généré par une coalition de deux joueurs est $\alpha \in [0, 1]$. Un joueur isolé reçoit 0.

1. Mettez ce jeu sous forme coalitionnelle.
2. Déterminez les valeurs de α pour lesquelles le coeur est non vide.
3. Montrez qu'on peut répondre sans calcul à la question suivante : comment la valeur de Shapley évolue dépend t-elle de α ?

Exercice 5 Le mécanisme d'affectation des élèves aux lycées utilisé à Boston avant 2006 était le suivant :

- Etape 0 : les élèves classent les lycées par ordre de préférence décroissant (le lycée préféré est classé en premier).
- Etape 1 : Seuls les premiers choix des étudiants sont considérés. Chaque lycée considère les demandes issues d'un premier choix et accepte les élèves selon leur priorité jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place ou plus d'élève l'ayant classé en premier. Toute affectation est défnitive.
- Etape 2. On considère les étudiants restants. Chaque lycée n'ayant pas atteint ses capacités maximales considère les demandes issues d'un second choix et accepte les élèves

selon sa priorité jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place ou plus d'élève l'ayant classé en second. Toute affectation est définitive.

- etc...

Considérons le cas particulier suivant : il y a trois élèves (s_1, s_2, s_3) et 3 lycées (c_1, c_2, c_3), et chaque lycée n'a qu'une seule place. Les préférences sont :

Elèves	Collèges
$c_2 \succ_{s_1} c_1 \succ_{s_1} c_3$	$s_1 \succ_{c_1} s_3 \succ_{c_1} s_2$
$c_1 \succ_{s_2} c_2 \succ_{s_2} c_3$	$s_2 \succ_{c_2} s_1 \succ_{c_2} s_3$
$c_1 \succ_{s_3} c_2 \succ_{s_3} c_3$	$s_3 \succ_{c_3} s_1 \succ_{c_3} s_2$

1. Déterminez l'appariement résultant de la procédure de Boston.
2. Montrez que cette procédure est manipulable, car l'un des élèves a intérêt à déclarer un faux premier choix.
3. Montrez qu'en partant de l'appariement de Boston déterminé à la question 1, on peut améliorer la situation des collèges en appliquant une procédure de Top Trading Cycle.
4. Quelle procédure pouvez vous conseiller à la mairie de Boston pour avoir un appariement stable et non manipulable par les élèves ?
5. Donnez l'appariement résultant de cette procédure.

