Partiel de théorie des jeux coopératifs 2016-2017

Master 1 d'ingénierie économique, Université Panthéon-assas Paris 2

Pas de Calculatrice. Aucun document. Veuillez justifier toutes vos réponses.

Exercice 1 : négociation

On note $U \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des profils d'utilités atteignables et d le point de désaccord. Tout au long de l'exercice, on supposera que les hypothèses habituelles sont satisfaites (U est convexe et fermé, $d \in U$, $\exists u \in U$ tel que $u_i > d_i$, $\forall i = 1, 2.$).

1. Trouver un jeu de négociation (U, d) dans lequel la solution de Nash et celle de Kalai-Smorodinski coincident.

2. Trouver un jeu de négociation (U, d) dans lequel la solution de Nash et celle Kalai-Smorodinski donnent des allocations différentes.

3. On rappelle les axiomes suivants :
   - Pareto : Une solution f satisfait Pareto si pour tout $u \in U$, $\exists\ i = 1, 2$ tel que $f_i(U, d) \geq u_i$.
   - Pareto fort : Une solution f satisfait Pareto fort si pour tout $u \in U$, $\forall\ i = 1, 2$, $f_i(U, d) \geq u_i$.

   (a) Trouver deux jeux de négociation, (U, d) et (U', d'), dans lesquels la frontière au sens de Pareto et celle au sens de Pareto fort coïncident.

   (b) Trouver deux jeux de négociation, (U, d) et (U', d'), dans lesquels la frontière au sens de Pareto et celle au sens de Pareto fort sont différentes.

Exercice 2 : coeur.

1. Soit un jeu TU (N, v). Montrer que toute imputation x est dans le coeur si et seulement si $x(S) \leq v(N) - v(N \backslash S)$ pour toute coalition S.

2. Donner un exemple de jeu à n (où n est quelconque) pour lequel le coeur est vide.

Exercice 3 : valeur de Shapley

Les Emirats Arabes Unis sont composés de 7 émirats : Abou Dhabi, Dubaï ; Sharjah ; Ajman ; Umm al-Quwain ; Ras Al Khaimah et Fujaïrah. Le conseil suprême est constitué des émirs de chacun de ces états. Les décisions sont adoptées à la majorité et les emirs d' Abou Dhabi et de Dubaï bénéficient d'un droit de veto.

1. Qui sont les joueurs nuls ?
2. Y a-t-il des joueurs égaux ?
3. Calculer l'indice Shapley-Shubik puis de Banzhaf pour chacun des émirats.
4. Imaginons que la constitution soit modifiée : Abou Dhabi et Dubaï perdent leur droit de veto et le poids de chacun des émirats est égal au pourcentage de sa population. Les pourcentages sont donnés dans le tableau suivant :

Emirat	%
Abu Dhabi	34
Dubai	32
Sharjah	20
Ajman	5
Umm Al-Quwain	1
Ras Al-Khaimah	5
Fujairah	3

   Calculer l'indice Shapley-Shubik puis de Banzhaf pour chacun des émirats. Qui sont les gagnants et qui sont les perdants d'une telle réforme ?

Exercice 5 : Appariement.

1. Montrer que tout appariement issu de Gale et Shapley est stable dans le cas d'un marché biface one to one.
2. Trouver un exemple de marché (autre que biface one to one) dans lequel il n'y a pas de matching stable.
3. Considérons une situation de type "housing market" avec d'un coté 4 maisons A, B C et D et 4 propriétaires $p1$ (qui possède A), $p2$ (qui possède B), $p3$ (qui possède C), $p4$

(qui possède D). Les préférences sont :

$$p1: \ B > C > A > D$$

$$p2: \ A > B > C > D$$

$$p3: \ A > D > C > B$$

$$p4: \ B > A > C > D$$

Trouver l'allocation issue de top trading cycle. Est-elle Pareto efficace ? Est-elle strategie proof ? Quel est l'avantage de cette procédure par rapport à Serial Dictatorship ?

Exercice 6 : Appariement.

Soit un ensemble d'universités $C = \{c_1, ..., c_n\}$ et un ensemble candidats à un poste de maitre de conférence $S = \{s_1, ..., s_n\}$, de même taille n. Les préférences des candidats sont strictes et $\forall i \in S$, $\forall j \in C$, $c_j \succ_{s_i} \emptyset$. On suppose que les universités ont les mêmes préférences sur les candidats : $\forall j \in C$,

$$s_1 \succ_{c_j} s_2 \succ_{c_j} ... \succ_{c_j} s_n$$

Les universités ne peuvent accepter qu'au plus un candidat. Montrer que l'algorithme d'acceptation différée (Gale et Shapley) dans lequel les candidats proposent et celui de Top Trading Cycle aboutissent au même matching.