

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant dans \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_2 \\ x_1^2 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \end{array} \right.$$

- Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
- Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
- Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } \sum_0^{T-1} -\frac{\beta^t}{2} v_t^2 - \beta^T x_T^2 \\ x_{t+1} = 4x_t + v_t \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

où $0 < \beta \leq 1$

- Ecrire le Hamiltonien du problème.
- Ecrire l'équation adjointe, le principe du maximum de Pontryagin et la condition de transversalité.
- Ecrire le système d'équations de récurrence et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.
- On pose $\beta = 1$. Résoudre alors le système.
- Résoudre le problème de contrôle optimal où $\beta = 1$.

Exercice 3

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser } \int_0^2 [-\dot{x}^2(t) - 4x^2(t) + 4tx(t) + x(t)\dot{x}(t)] dt$$
$$x(0) = 0, \quad x(2) = 1$$

- Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange.
- Trouver le(s) candidat(s).
- Résoudre le problème.