Université Paris II **Mathématiques 5**
L3 Economie et Gestion - Magistère BF **Cours de Mme HAYEK**
Janvier 2023. 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

a) Etudier les extrema de la fonction $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

On considère à présent le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Extrema} \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 \\ \\ (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 = 4 \end{cases}$$

b) Justifier l'existence d'une solution à ce problème (sans la calculer).
c) Ecrire le Lagrangien et les conditions du 1er ordre.
d) Ces conditions sont-elles nécessaires ? Sont-elles suffisantes?
e) Résoudre le problème (seules les solutions globales sont requises).

Exercice 2

On considère le problème suivant dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 7x_2^2 \\ x_1 \geq 0 \\ 2 - 3x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Pourquoi est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les 3 valeurs propres de A. Que vaut $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$?
c) Montrer que la matrice A a trois valeurs propres simples $\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{3}, \ \lambda_3 = 2 - 2\sqrt{3}$.
d) Pourquoi est-elle inversible?

e) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).
f) Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$.
g) Résoudre le système différentiel linéaire.
h) Montrer qu'il existe un unique équilibre.