

Paris

**Session :** JANVIER 2023

**Année d'étude :** L3 économie-gestion

**Discipline :** Economie de l'incertain et de l'infotmation  
(Unités d'Enseignements Fondamentaux 1)

**Titulaire(s) du cours :** V. Hiller

**Durée de l'épreuve :** 3 heures

**Document(s) autorisé(s) :** Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

### Economie de l'incertain et de l'information L3

Durée de l'épreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

**Exercice 1.** Considérons un individu possédant un actif de valeur  $v$ , sur lequel pèse un risque de sinistre. Avec une probabilité  $p$  cet actif est détruit (sa valeur tombe à 0), avec une probabilité  $1 - p$  il reste intact (sa valeur reste égale à  $v$ ). Pour se protéger contre ce risque, il est possible de contracter une assurance permettant de toucher une indemnité  $z$  en cas de sinistre en échange du paiement d'une prime d'assurance  $\beta z$  ( $\beta$  est positif et inférieur à 1). La variable  $z \in [0, v]$  correspond au niveau de couverture qui est choisi par l'individu. ce dernier fait donc face à la loterie

$$A(z) = [(p, 1 - p), ((1 - \beta)z, v - \beta z)].$$

Les préférences de cet individu sont représentées par la fonction d'utilité élémentaire:

$$u(x) = -\exp(-\lambda x)$$

avec  $\lambda > 0$ .

1) Supposons que  $p > \beta$ .

1.a) Quel niveau de couverture  $z^*$  cet individu a-t-il intérêt à choisir?

1.b) Pensez vous qu'une compagnie d'assurance sera prête à offrir un contrat dans ce cas? Justifiez précisément votre réponse.

2) Plaçons nous maintenant dans le cas où  $p = 1/2$  et  $\beta > 1/2$ . Quel niveau de couverture  $z^*$  cet individu a-t-il intérêt à choisir dans ce cas? [Vous pourriez avoir besoin d'utiliser la propriété suivante:  $\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a - b)$ .]

**Exercice 2.** Considérons un individu possédant une richesse initiale  $w$  qu'il doit partager entre deux actifs. Un actif certain de rendement  $i$  (1 euro investi dans cet actif rapporte  $1 + i$  euros) et un actif risqué de rendement  $R$  (1 euro investi dans cet actif rapporte  $1 + R$  euros). La variable aléatoire  $R$  a une espérance  $\mathbb{E}(R) = \bar{r}$  et une variance  $\mathbb{V}(R) = \sigma^2$ .

Les préférences de cet individu sur les loteries sont représentées par la fonction de Markowitz suivante:

$$U(L) = \mathbb{E}(L) - k\mathbb{V}(L).$$

avec  $k > 0$ .

On note  $a$  le montant investi en actif risqué. Le montant investi en actif certain est donc  $w - a$ .

1) Ecrivez l'utilité de cet individu comme une fonction du montant  $a$  investi en actif risqué.

2) Déterminez la valeur  $a^*$  de l'investissement en actif risqué qui maximise l'espérance d'utilité de cet individu.

**Exercice 3.** Considérons un entrepreneur produisant un bien. Les quantités produites dépendent de l'effort  $e$  entrepris par ce dernier. Plus précisément cet quantité est égale à  $\sqrt{e}$ . Le bien peut être vendu à un prix qui n'est pas connu à l'avance. Ce prix  $P$  peut être considéré comme une variable aléatoire d'espérance  $\mathbb{E}(P) = \bar{p}$  et de variance  $\mathbb{V}(P) = \sigma^2$ . De plus, un niveau d'effort  $e$  induit un coût  $c.e$  pour l'entrepreneur,  $c$  étant un paramètre positif. Ainsi, les profits de l'entrepreneur, pour un niveau d'effort  $e$  donné, sont

$$\Pi = P.\sqrt{e} - c.e$$

1) Supposons que l'entrepreneur soit neutre au risque et choisisse son niveau d'effort pour maximiser son espérance de profit. Déterminez son effort optimal  $e^*$  dans ce cas.

2) Supposons que les préférences de l'entrepreneur soient représentées par la fonction de Markowitz linéaire suivante

$$U(\Pi) = \mathbb{E}(\Pi) - k.\mathbb{V}(\Pi)$$

avec  $k > 0$ . Déterminez son effort optimal  $e^*$  dans ce cas.

3) Comparez les niveaux d'effort obtenus en questions 1) et 2). Commentez.

**Exercice 4.** Considérons un problème d'aléa moral entre le propriétaire d'une entreprise (principal) et un manager (agent). Il existe deux niveaux d'effort possibles:  $e \in \{e_H, e_L\}$ ,  $e_H$  représentant l'effort haut et  $e_L$  l'effort bas. Si l'effort du travailleur est  $e_H$  l'entreprise fait des bénéfices hauts ( $b_H$ ) avec une probabilité  $p(e_H) = 3/4$  et des bénéfices bas ( $b_L$ ) avec une probabilité  $1 - p(e_H) = 1/4$ , si cet effort est  $e_L$  la probabilité de bénéfices hauts est  $p(e_L) = 1/4$  et la probabilité de bénéfices bas est  $1 - p(e_L) = 3/4$ . L'utilité de l'agent dépend du salaire qu'il reçoit ( $w$ ) et de son effort  $e$ :

$$u_a(w, e) = v(w) - c(e)$$

avec  $c(e_L) = 0$  et  $c(e_H) = 4$ . De plus nous supposons que l'agent a une utilité de réservation  $\bar{u} = 2$ .

Le principal est supposé neutre au risque, son utilité correspond aux profits qu'il retire de la réalisation du projet de production. Ainsi, si les bénéfices du projet sont égaux à  $b$  et le salaire proposé au travailleur est égal à  $w$ , l'utilité du principal est:

$$u_p(b, w) = b - w$$

1) Dans cette question nous supposons que  $v(w) = w$ ,  $b_H = 20$  et  $b_L = 4$ .

1.a) Supposons que l'effort est observable et que le principal veuille imposer l'effort haut à l'agent. Proposez un schéma de rémunération  $(w_H, w_L)$  optimal du point de vu du principal. Justifiez votre réponse. [Il peut en exister plusieurs mais l'on ne vous en demande qu'un].

1.b) Supposons que l'effort est inobservable et que le principal veuille inciter l'agent à choisir l'effort haut. Proposez un schéma de rémunération  $(w_H, w_L)$  optimal du point de vu du principal. Justifiez votre réponse. [Il peut en exister plusieurs mais l'on ne vous en demande qu'un].

2) Dans cette question nous supposons que  $v(w) = \sqrt{w}$  et  $b_L = 0$ . Nous ne spécifions pas de valeur pour  $b_H$ . Nous supposons en outre que l'effort est inobservable.

2.a) Déterminez le contrat optimal, du point de vu du principal, permettant d'inciter l'agent à choisir l'effort bas. [Vous pouvez utiliser des résultats vus en cours sans nécessairement les démontrer.]

2.b) Déterminez le contrat optimal, du point de vu du principal, permettant d'inciter l'agent à choisir l'effort haut. [Vous pouvez utiliser des résultats vus en cours sans nécessairement les démontrer.]

2.c) Pour quelles valeurs de  $b_H$  le principal a intérêt à inciter l'agent à choisir l'effort bas plutôt que l'effort haut?