Université Paris II | **Mathématiques 3**
L2 Economie et Gestion | **Cours de Mme HAYEK**
Janvier 2023. 1h30
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
Soit E et F des espaces vectoriels tels que $\dim E = \dim F = n$.
Soit $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ une base de E.
Soit ϕ une application linéaire de E dans F.
a) Donner trois conditions nécessaires et suffisantes pour que ϕ soit injective.
b) Montrer que ϕ est surjective si et seulement si $\{\phi(\vec{e}_1), ..., \phi(\vec{e}_n)\}$ est un système générateur de F.
c) Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Soit B une matrice colonne $(n, 1)$. Démontrer que le système $AX = B$ admet une unique solution.

Exercice 2
Soit f une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que:
$$f(\vec{u}) = f(x, y, z, t) = (x,\ y - 2t,\ x - y + z).$$
a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer $Kerf$. En donner une base et la dimension.
c) Quelle est la dimension de $f(\mathbb{R}^4)$?
d) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^4)$.
e) f est-elle injective, surjective, bijective?
f) Calculer la matrice A représentant f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (départ et arrivée) est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$
a) Déterminer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
b) Pour quelles valeurs de a, f est elle injective, surjective, bijective ?
c) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible? Dans ce cas calculer l'inverse de A en fonction a.

Exercice 4
a) On rappelle que $\mathcal{M}(3, 2)$ est l'espace vectoriel des matrices $(3, 2)$. Quelle est sa dimension?
b) Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, 2)$:
$$\mathcal{A} = \{A = \begin{pmatrix} a - 3d & b - 4a \\ 0 & a \\ c & c + d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, 2) \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
c) Donner une base de cet espace.
d) Quelle est la dimension de cet espace?