

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant dans \mathbb{R}^2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 14x_2^2 \\ x_1 \geq 0 \\ 2 - 3x_1 + x_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

- Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
- Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
- Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème suivant dans \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 2) + \ln(x_2 + 2) \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
- Résoudre le problème.

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que A admet une valeur propre simple $\lambda_1 = 2$ et une valeur propre double $\lambda_2 = -1$.
- Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
- Montrer que A est diagonalisable. (Ne pas calculer P^{-1})
- Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' & = y_2 + y_3 \\ y_2' & = y_1 + y_3 \\ y_3' & = y_1 + y_2 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$

- Résoudre le système.