

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

### Exercice 1

- a) Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  inversible. Soit  $B$  une matrice colonne  $(n, 1)$ . Démontrer que le système  $AX = B$  admet une unique solution.  
b) En déduire la solution du système linéaire suivant, sachant que  $a$  et  $b$  sont des réels vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ .

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases}$$

### Exercice 2

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que:

$$f(\vec{u}) = f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x - y + 3t, -2x + 2y - 2z).$$

- a) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Déterminer  $\text{Ker } f$ . En donner une base et la dimension.  
c) Quelle est la dimension de  $f(\mathbb{R}^4)$ ?  
d) Déterminer une base de  $f(\mathbb{R}^4)$ .  
e)  $f$  est-elle injective, surjective, bijective?  
f) Calculer la matrice  $A$  représentant  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 3

- a) Montrer que le système de vecteurs suivant forme une base de  $\mathbb{R}^3$ :

$$B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$$

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que:

$$f(1, 1, 1) = (2, 4, 2), \quad f(-1, 1, 1) = (0, -2, -4), \quad f(0, 1, 0) = (a, 2a, 2)$$

- b) Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?  
c) Calculer la matrice  $A$  représentant  $f$  dans la base  $B$  au départ et la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à l'arrivée.  
d) Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $A$  est-elle inversible? Calculer son inverse pour ces valeurs.

### Exercice 4

- a) On rappelle que  $\mathcal{M}(3, 2)$  est l'espace vectoriel des matrices  $(3, 2)$ . Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}(3, 2)$ :

$$A = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, 2) / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- b) Donner une base de cet espace.  
c) Quelle est la dimension de cet espace?