Université Paris II
M1 Economie et Gestion
Monnaie-Banque-Finance
Janvier 2018. 1h30

Mathématiques appliquées à la finance (4334)
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant dans $I\!R^3$:

$$\begin{cases} \text{minimiser} \quad f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1+1) + \ln(x_2+1) + \ln(x_3+1) \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ \qquad\qquad \forall i = 1, ..., 3,\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
b) Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser} \int_0^T [\, -3\dot{x}^2(t) - 12x^2(t) + 4x(t) + x(t)\dot{x}(t) \,]dt + x(T)$$

$$x(0) = \frac{1}{6}$$

a) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et la condition de transversalité.
b) Résoudre l'équation d'Euler-Lagrange.
c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le Hamiltonien $H(t, x, v, p) = -2x + 4px - 3v^2 - 2pv - t$, où x est la variable d'état, v la variable de contrôle et p la variable adjointe. Une condition aux limites est $x(0) = 2$. $x(1)$ n'est pas donnée.
a) Quel est le problème de contrôle optimal associé?
b) Ecrire les conditions nécessaires du premier ordre.
c) Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.
d) Résoudre le système.
e) La solution du système est-elle solution du problème de contrôle optimal? Justifier la réponse.