Université Paris II
Magistère Banque-Finance 2
Mai 2017. 1h30

Optimisation Dynamique (4321)
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = -\dfrac{1}{2}X^TVX + B^TX + c \\ \qquad\qquad GX = D \end{cases}$$

où X est la matrice colonne $(n, 1)$ des composantes de $(x_1, ..., x_n)$, V une matrice carrée d'ordre n définie positive, B une matrice colonne $(n, 1)$, c un réel, G une matrice (p, n) de rang p<n, D une matrice colonne $(p, 1)$.

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions du premier ordre.
b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
c) Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser} \int_0^T [\,-\dot{x}^2(t) - 4x^2(t) + 4tx(t) + x(t)\dot{x}(t)\,]dt - x^2(T)$$

$$x(0) = 0$$

a) Quelles sont les conditions nécessaires du premier ordre?
b) Trouver le(s) candidat(s).
c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad \displaystyle\int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2(t) - \frac{1}{2}v^2(t))dt \; + \; x(1) \\ \qquad\qquad \dot{x}(t) = 2x(t) + v(t) \\ \qquad\qquad x(0) = 0, \;\; v(t) \in I\!R \end{cases}$$

a) Ecrire le Hamiltonien du problème.
b) Ecrire l'équation adjointe, le principe du maximum de Pontryagin et la condition de

transversalité.

c) Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.

d) Résoudre le système.

e) Résoudre le problème de contrôle optimal.

f) Ecrire le problème initial sous forme d'un problème de calcul des variations (sans le résoudre).

On donne: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2+\sqrt{5} & -2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}+5}{10} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-2\sqrt{5}+5}{10} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$.