

Examen de théorie des Jeux L3 (Durée 3 heures),  
Licence Analyse Economique,  
Cours de Monsieur le Professeur D. Gaumont,  
Panthéon Assas, Sorbonne Université.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document, aucun support de cours n'est autorisé. Pas de walkman, baladeur ni téléphone portable. Les sacs sont rangés le long du mur. Les étudiants n'ont sur la table que de quoi écrire. Si un étudiant pense que le sujet comporte une erreur, il l'indique sur sa copie et continue l'examen avec la correction qu'il suggère.

### Questions de Cours

1. Rappeler ce qu'est la fonction de joueur, et préciser à quel type de jeux s'applique-t-elle. (1 point)
2. Quelle différence faites-vous entre théorie des jeux et équilibre concurrentiel? (2 points)
3. Définir ce qu'est l'extension mixte d'un jeu stratégique, ainsi qu'un équilibre corrélé d'un jeu stratégique. (3 points)
4. Définir un équilibre de Nash d'un jeu extensif avec information parfaite. Quelle est la principale limite de ce concept? Quelle est la solution que Selten a apporté à cette limite? (4 points)

### 0.1 Exercice 1 : La bataille des sexes

On considère un couple de personne qui souhaite sortir au concert un soir. La première personne, Madame, préfère se rendre au concert de Bach, cependant que la seconde personne, Monsieur, préfère se rendre à Stravinsky. Toutefois, les deux sont d'accord pour préférer sortir ensemble plutôt que chacun séparément.

Si chacun sort seul, alors chacun reçoit un gain nul. Si le couple sort ensemble, celui qui se rend au concert de son premier choix reçoit 2 unités de gain, cependant que l'autre ne reçoit qu'une seule unité de gain.

1. Montrer que ce jeu est un jeu stratégique.
2. Ecrire la matrice des gains
3. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures ?
4. Quelle est la valeur de l'utilité de chaque joueur ?
5. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes ?
6. Quelle est la valeur des espérances d'utilités de chaque joueur ?
7. On suppose maintenant que les conjoints préfèrent tirer au sort avant de sortir ensemble. L'ensemble des états de la nature est du type  $\Omega = \{x, y, z\}$ . Madame dispose d'un ensemble d'information de la forme  $P_1 = \{\{x\}\{y, z\}\}$ . Monsieur dispose d'un ensemble d'information de la forme  $P_2 = \{\{x, y\}\{z\}\}$ . Les stratégies sont désormais définies comme suit :  $\sigma_1(x) = B$  et  $\sigma_1(y) = \sigma_1(z) = S$  et  $\sigma_2(x) = \sigma_2(y) = B$  et  $\sigma_2(z) = S$ . Comment s'appelle ce type d'équilibre ?
8. Quelle est la valeur de l'espérance d'utilité de chaque joueur ?
9. Interpréter économiquement vos résultats en comparant les questions précédentes entre elles.

## 0.2 Exercice 2 : Une enchère au second prix

Dans une enchère au second prix, le gagnant est celui qui effectue la mise à prix la plus élevée, mais le prix payé est la seconde mise la plus élevée (et non pas la sienne)).

1. Montrer que dans une enchère au second prix la mise  $v_i$  de n'importe quel joueur  $i$  est une action faiblement dominante : le *payoff* du joueur  $i$  lorsqu'il formule sa mise  $v_i$  est au moins aussi élevée que son *payoff* lorsqu'il soumet n'importe quelle autre mise à prix, sans tenir compte de ce que les autres joueurs choisissent comme action.
2. Montrer que malgré tout il peut y avoir des équilibres inefficients dans lesquels le gagnant n'est pas nécessairement le joueur 1.

## 0.3 Exercice 3 : Stratégies prudentes et équilibre de Nash

On considère un jeu stratégique fini à deux joueurs,  $i = 1, 2$  dans lequel l'ensemble des actions du premier joueur est constitué de l'action  $a_1$  ou  $a_2$ , et celui du deuxième joueur de l'action  $b_1$  ou  $b_2$ .

- Si le premier joueur joue  $a_1$  pendant que le deuxième joueur joue  $b_1$  le premier joueur obtient  $-3$  et le second joueur 2.

- Si le premier joueur joue  $a_1$  pendant que le deuxième joueur joue  $b_2$  le premier joueur obtient  $-2$  et le second joueur  $3$ .
  - Si le premier joueur joue  $a_2$  pendant que le deuxième joueur joue  $b_1$  le premier joueur obtient  $-5$  et le second joueur  $4$ .
  - Si le premier joueur joue  $a_2$  pendant que le deuxième joueur joue  $b_2$  le premier joueur obtient  $-4$  et le second joueur  $5$ .
1. Montrez qu'il s'agit d'un jeu concurrentiel à somme nulle.
  2. Ecrire la matrice des gains.
  3. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash de ce jeu ?
  4. Quel est l'ensemble des équilibres en stratégies prudente ?
  5. Qu'observe-t-on ? Expliquez pourquoi.