

1 Examen de Théorie des Jeux

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document, aucun support de cours ne sont autorisés. Ni walkman, ni baladeur, ni téléphone portable, ni MP3, ni MP4 etc. Les sacs sont rangés le long du mur. Seuls subsistent sur les tables les fournitures nécessaires pour composer. Pour prendre un objet dans son sac, il faut demander l'autorisation des surveillants. Si un étudiant considère que le sujet comporte une erreur, il l'indique sur sa copie et continue à composer en considérant cette correction.

2 Questions de cours sur 10 points

1. Rapeller la définition d'un jeu stratégique. (1 point)
2. Quelle différence faites vous entre une décision et une stratégie (optimale) (2 points)?
3. Que dit le théorème de Brouwer, dans quels cas ne s'applique-t-il pas, et enfin à quoi sert-il?
4. Quelle est la définition d'un jeu séquentiel? (4 points)

3 Exercices sur 10 points

3.1 Exercice 1 : Une enchère au premier prix

On considère un objet qui doit être vendu par une enchère au premier prix¹. Soit V l'ensemble des évaluations possibles de l'objet. Deux personnes, notées $i = 1, 2$, font une évaluation $v_i \in V$ du bien à vendre. Les offres de chaque enchérisseur notées b_i sont remises sous plis cacheté en même temps. On suppose que les deux évaluations des deux enchérisseurs sont uniformément distribuées sur le compact $[0, 1]$. Les évaluations sont contraintes à ne pas être négatives. L'offre la plus élevée remporte l'objet et paye le prix de l'évaluation. L'autre joueur ne paye rien et ne remporte pas l'objet. Si les deux offres sont égales, on tire au hasard le vainqueur. Si le joueur i obtient l'objet et paye celui-ci le prix $p = b_i$ alors son payoff est $v_i - b_i$. Les enchérisseurs sont neutres au risque². La règle du jeu est "common knowledge", c'est-à-dire connue de tous.

1. C'est le cas par exemple de la vente d'une maison, de la vente d'objets dans une salle des ventes, ou encore de la politique monétaire de la banque centrale qui rachète des titres par enchère lorsqu'elle souhaite contracter la masse monétaire.

2. Cela signifie que s'ils prennent une unité supplémentaire de risque leur espérance d'utilité croît d'une unité supplémentaire.

1. Montrer qu'il s'agit d'un jeu bayésien. (1 point)
2. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash de ce jeu ? (1 point)
3. Interpréter économiquement le résultat. (1 point)

3.2 Exercice 2 : La bataille des sexes

On considère un couple de personne qui souhaite sortir au concert un soir. La première personne, Madame, préfère se rendre au concert de Bach, cependant que la seconde personne, Monsieur, préfère se rendre au concert de Stravinsky. Toutefois, les deux sont d'accord pour préférer sortir ensemble plutôt que chacun séparément.

Si chacun sort seul, alors chacun reçoit un gain C . Si le couple sort ensemble, celui qui se rend au concert de son premier choix reçoit A unités de gain, cependant que l'autre ne reçoit que B , avec $A > B > C$.

1. Montrer que ce jeu est un jeu stratégique. (1 point)
2. Ecrire la matrice des gains (0.5 point)
3. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash ? (1 point)
4. Interpréter économiquement vos résultats. (1 point)

3.3 Exercice 3 : La stratégie militaire

Les armées 1 et 2 se battent pour prendre une île initialement détenue par un seul bataillon de l'armée 2. Chaque armée dispose de y_i bataillons, $i = 1, 2$. Bien que l'île soit la possession de l'armée 2, l'armée 1 envisage de prendre le contrôle de l'île en l'attaquant. A l'issue de l'attaque chaque armée aura perdu 1 bataillon. Dans ce cas, l'armée attaquée i a perdu et l'armée attaquante j fait revenir un bataillon et occupe l'île avec un seul bataillon. Le commandement de chaque armée est intéressé par maximiser le nombre de bataillons survivants, mais l'occupation de l'île vaut plus qu'un bataillon mais moins que deux. Si après l'attaque chaque armée ne dispose plus d'aucun bataillon, alors le payoff est nul.

1. Montrer qu'il s'agit d'un jeu sous forme extensive avec information parfaite. (1.5 point)
2. Quel est l'équilibre de Nash en sous jeux parfaits ? (1 point)
3. En déduire quel est le vainqueur en fonction de y_i et y_j . (1 point)