

Economie de l'incertain et de l'information L3

Durée de l'épreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

Exercice 1 - Choix de portefeuille

Considérons un individu qui dispose d'une somme d'argent s qu'il souhaite allouer entre deux actifs : un actif sûr dont le taux de rendement est certain égal à $i > 0$ (chaque euro investi dans cet actif rapporte $1 + i$ euros) et un actif risqué dont le taux de rendement R est aléatoire (chaque euro investi dans cet actif rapporte $1 + R$ euros). La variable aléatoire R suit une loi de probabilité continue d'espérance $\mathbb{E}(R) = r$ et de variance $\mathbb{V}(R) = \sigma^2$ avec $r \geq i$. On note $\lambda \in [0, 1]$ la proportion du montant s que l'individu alloue à l'actif certain.

La fonction d'utilité élémentaire de cet individu est de type exponentielle négative:

$$u(x) = -\exp(-\beta x) \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

1) Écrire la richesse aléatoire de cet individu (que nous noterons W) en fonction de la variable aléatoire R , de la proportion λ et des autres paramètres du modèle (i et s).

Cet individu choisit la proportion λ de façon à maximiser son espérance d'utilité. Nous vous rappelons qu'il est équivalent de maximiser cette espérance d'utilité et la différence entre l'espérance de sa richesse aléatoire et la prime de risque qu'il associe à cette richesse aléatoire: $\mathbb{E}(W) - \Pi$.

2) Donnez l'expression de l'espérance de richesse $\mathbb{E}(W)$ en fonction de λ et des paramètres s , i et r .

3) En utilisant l'approximation de Pratt, donnez l'expression de la prime de risque Π en fonction de λ et des paramètres s , β et σ^2 .

4) Nous définissons la prime de risque marginale (Π_m) et l'espérance de gain marginale (E_m) de la façon suivante:

$$E_m = \frac{\partial \mathbb{E}(W)}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad \Pi_m = \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}$$

Après avoir calculé Π_m et E_m , calculez la valeur de λ que l'individu a intérêt à choisir (elle sera notée λ^*).

5) Représentez sur un même graphique E_m et Π_m en fonction de λ , et faites apparaître λ^* sur ce graphique, dans les trois configurations suivantes (une attention particulière sera portée à la précision de votre représentation):

a) $r = i$

- 3) Ecrire la contrainte de participation de l'agent lorsque ce dernier est incité à choisir l'effort haut.
- 4) Ecrire la contrainte d'incitation devant être respectée pour que l'agent soit incité à choisir l'effort haut.
- 5) En vous basant sur les résultats vus en cours, déterminez le contrat qu'a intérêt à offrir le principal si il souhaite que l'agent choisisse l'effort haut.
- 6) Pour quelles valeurs de I est-il rentable pour le principal d'offrir un tel contrat?
- 7) Si l'effort avait été observable, la banque aurait-elle été en mesure de prêter de plus grosses sommes? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 3

Considérons un individu ayant pour fonction d'utilité élémentaire:

$$u(x) = ax^2 + bx$$

Montrez que l'espérance d'utilité que cet individu associe à la variable aléatoire X (d'espérance μ et de variance σ^2) est égale à:

$$\mathbb{E}u(X) = a\sigma^2 + \mu(b + a\mu)$$