

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Un investisseur détenant une richesse W_0 veut répartir cette richesse entre n classes d'actifs, $n > 2$. Pour cela il va utiliser le critère moyenne-variance. Les espérances des rendements

des n classes d'actifs sont données par: $M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ et les variances-covariances par V

matrice carrée d'ordre n définie positive. Soit x_1, \dots, x_n les parts respectives de la richesse investies dans les actifs. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on considère le problème

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & X^T M - \gamma X^T V X \\ & GX = D \end{cases}$$

où G matrice $(2, n)$ de rang 2, D matrice $(2, 1)$ et γ est le degré d'aversion vis-à-vis du risque.

- a) Ecrire le Lagrangien et les conditions du premier ordre.
- b) Montrer qu'elles sont nécessaires et suffisantes.
- c) Résoudre alors le problème.

Exercice 2

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\text{Maximiser} \int_0^3 [-2\dot{x}^2(t) - 8x^2(t) - 8x(t) + 2x(t)\dot{x}(t)] dt + x(3)$$

$$x(0) = -\frac{1}{2}$$

- a) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et la condition de transversalité.
- b) Trouver le(s) candidat(s).
- c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le problème de contrôle optimal suivant: