Université Paris II Statistiques 4 (5289)
L2 Sciences Économiques et Gestion Cours de M$^{\text{me}}$ Chevalier

Mai 2018

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif et peut évoluer. Le sujet est noté sur 11.
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais commencez si possible chaque exercice en haut d'une nouvelle page de votre copie et pensez à numéroter les pages.

Exercice 1 (4 points)

Afin d'optimiser la fréquence des moyens de transports, le service municipal d'une ville souhaite estimer le temps d'attente moyen aux arrêts de bus de l'une des principales lignes. Pour cela, on considère que le temps d'attente en minutes peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$ où θ est un réel inconnu strictement positif. Rappelons que sa densité est égale à

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta \times \mathrm{e}^{-x/\theta} & \text{si } x \in [\,0\,;+\infty\,[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le temps d'attente de n usagers choisis au hasard fournit donc un échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable aléatoire X.

1. Montrer que $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{X}}_n$ est un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Donner un deuxième estimateur T'_n de θ obtenu par la méthode des moments.
3. Montrer que l'estimateur de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n.
4. Montrer que l'information de Fisher est égale à $\mathrm{I}_n(\theta) = n/\theta^2$.
5. Donner la définition d'un estimateur sans biais et d'un estimateur convergent.
   L'estimateur T_n vérifie-t-il ces propriétés ?
6. Est-il efficace ?

Exercice 2 (2 points)

Soit X_1, X_2 et X_3 trois v.a. indépendantes de même loi normale standard.

1. Déterminer la loi de probabilité du vecteur Y dont les composantes sont définies par
$$\mathrm{Y}_1 = 2\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 - 2\mathrm{X}_3 \qquad \mathrm{Y}_2 = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_3 \qquad \mathrm{Y}_3 = \mathrm{X}_2 + 2\mathrm{X}_3$$
2. En déduire que Y_1 suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 3)$
3. On peut montrer de même (et on l'admettra ici) que Y_2 suit une loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. Montrer que Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On citera précisément le résultat du cours utilisé.

Exercice 3 (1 point)

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi est définie par la densité

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la densité marginale de la variable aléatoire X vérifie $f_{\mathrm{X}}(x) = 2x$ si $x \in [\,0\,;1\,]$ (et 0 sinon).
2. Montrer que la densité marginale de la variable aléatoire Y vérifie $f_{\mathrm{Y}}(y) = y/2$ si $y \in [\,0\,;2\,]$ (et 0 sinon).

3. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
4. Donner l'expression de la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ et la calculer.

Exercice 4 (2 points)

1. On considère la suite $(X_n)_{n\geqslant 3}$ de v.a. indépendantes de support $\mathbb{Z}$ et de loi

$$\forall n \geqslant 3 \qquad \begin{cases} P(X_n = -1) = \dfrac{2}{3n} \\ P(X_n = 0) = \dfrac{2n-1}{3n} \\ P(X_n = 1) = \dfrac{n-2}{3n} \\ P(X_n = 2) = \dfrac{1}{n} \\ P(X_n = k) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une loi que l'on précisera.

2. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 10. On considère la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. définie par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad Z_n = 100 \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}\right)^2$$

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer Z_n en fonction de $\overline{Y}_n$.

   (b) Montrer que la suite $(\overline{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers un réel y que l'on précisera.

   (c) En déduire la convergence en probabilité, puis en loi, de la suite (Z_n) vers la v.a. constante en 1. On citera précisément les théorèmes utilisés.

Exercice 5 (2 points)

Le nombre de dysfonctionnements par jour d'un appareil de mesure est modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel positif inconnu qu'on cherche à estimer. Rappelons qu'une telle loi est définie par

$$\forall x \in \mathbb{N} \qquad P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

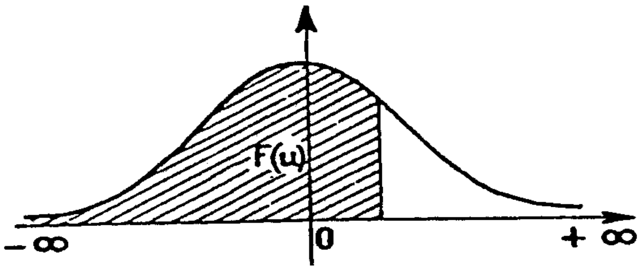
Le nombre de dysfonctionnements observés pendant n journées choisies au hasard fournit ainsi un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la variable aléatoire X.

On admet qu'un estimateur T_n de λ construit par la méthode des moments est $T_n = \overline{X}_n$, que l'estimateur de λ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est également T_n et qu'il est sans biais, convergent et efficace.

1. Sur une période d'observation de $n = 200$ jours, les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 400$. Donner l'estimation de λ obtenue avec ces valeurs.
2. Quelle approximation peut-on utiliser pour la loi de T_n si n est suffisamment grand ?
3. En déduire un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre λ.

   On remplacera pour cela l'écart-type de la variable X *dans les bornes de l'intervalle par un estimateur.*
4. On choisit un seuil de confiance $1 - \alpha = 95\%$. On rappelle que sur une période de $n = 200$ jours, les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ sont telles que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 400$. Donner la réalisation de l'intervalle de confiance obtenue avec ces valeurs (en arrondissant à un chiffre après la virgule).

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota – La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple   pour u =   1,37   F(u) = 0,9147
           pour u = -1,37   F(u) = 0,0853