Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.C.2
Droit-Economie-Sciences Sociales 4478
Assas

| | |
|---|---|
| **Session :** | Mai 2018. |
| **Année d'étude :** | Première année de Master économie-gestion mention ingénierie économique et statistique. |
| **Discipline :** | **Théorie de la décision : ambiguïté** (Unité d'Enseignements Complémentaires 2). |
| **Titulaire du cours :** | M. Lorenzo BASTIANELLO. |
| **Document(s) autorisé(s) :** | Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance. |

**Indications et consignes :**

— La qualité de la présentation et la tenue de la copie seront prises en compte.
— *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.*

1. (9 points) Soit $\Omega$ l'ensemble d'états de la nature, $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\Omega$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des actes de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Un décideur est *averse à l'ambiguïté* si pour tout $f, g, h \in \mathcal{F}$ tels que $f \sim g$ et $h$ comonotone avec $g$ nous avons $f + g \succsim g + h$.

1. (1 point) Donner la définition de comonotonie pour deux actes $f, g \in \mathcal{F}$.
2. (1 point) Interpréter, à l'aide d'un exemple, l'axiome d'aversion à l'ambiguïté.
3. Considérons un décideur qui évalue les actes avec la fonction $I(f) = \int f dv$ où $v$ est une capacité et l'intégrale est un intégrale de Choquet. On se propose de montrer que si le décideur est averse à l'ambiguïté alors $v$ doit être convexe. Dans la suite on fixe deux ensembles $A, B \in \mathcal{A}$.
   (a) (1 point) Donner la définition d'une capacité convexe.
   (b) (2 points) Monter que $1_A \sim v(A)1_\Omega$ et que $1_A + 1_B \succsim (v(A) + v(B))1_\Omega$.
   (c) (1.5 points) Montrer que $1_A + 1_B = 1_{A\cup B} + 1_{A\cap B}$
   (d) (1 point) Montrer que $1_{A\cup B}$ et $1_{A\cap B}$ sont comonotones.
   (e) (1.5 point) Montrer que $v$ est convexe.

2. (11 points) Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Un décideur doté d'une richesse initiale $w > 0$ évalue un actif avec le modèle CEU défini par $I(f) = \int u(f)dv$ où $v$ est une capacité sur $\Omega$ et $u : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité telle que $u'(x) > 0$ et $u''(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Soit $f$ un actif de prix $p > 0$ tel que $f(\omega_1) = x_1$, $f(\omega_2) = x_2$ avec $x_1 \leq x_2$. (*Vous pouvez utiliser les postulats des questions que vous n'avez pas réussies à traiter pour répondre aux suivantes.*)

1. (1.5 points) Si le décideur achète une quantité $\alpha \in [0, w]$ de l'actif, il aura une richesse future aléatoire $W_A(\alpha) = w - \alpha + \frac{\alpha}{p} f$. Interpréter cette formule et calculer $I(W_A(\alpha))$ (c.a.d. l'utilité d'acheter une quantité $\alpha \in [0, w]$ de l'actif).
2. (1 points) Montrer que la dérivée de $I(W_A(\alpha))$ par rapport à $\alpha$ est égale à $I'(W_A(\alpha)) = (1 - v(\omega_2)) \left(\frac{x_1}{p} - 1\right) u'\left(w - \alpha + \frac{\alpha}{p} x_1\right) + v(\omega_2) \left(\frac{x_2}{p} - 1\right) u'\left(w - \alpha + \frac{\alpha}{p} x_2\right)$ et calculer $I'(W_A(0))$.

3. (2 points) Montrer que $I''(W_A(\alpha)) \leq 0$ pour tout $\alpha \in [0, w]$. Justifier le fait que le décideur n'achète pas de parts de $f$ si et seulement si $I'(W_A(0)) \leq 0$.
4. Soit $W_V(\beta)$ la richesse future du décideur s'il vend à découvert $\beta \in [0, w]$ parts de l'actif.
   (a) (0.5 points) Donner l'expression de $W_V(\beta)$.
   (b) (1 point) Monter que $I'(W_V(0)) = u'(w)\left[1 - \frac{x_2}{p}(1 - v(\omega_1)) - \frac{x_1}{p}v(\omega_1)\right]$
   (c) (0.5 points) Montrer que $I''(W_V(\beta)) \leq 0$ pour tout $\beta \in [0, w]$. Justifier le fait que le décideur ne vendra pas à découvert si et seulement si $I'(W_V(0)) \leq 0$.
5. (2 points) Déduire des points 2,3 et 4.b, 4.c que ce décideur ne prendra aucune position sur le marché si et seulement si $p \geq \int f dv$ et $p \leq -\int -f dv$.
6. Soit $f$ l'actif défini par $f(\omega_1) = 1$, $f(\omega_2) = 5$, $v$ la capacité $v(\omega_1) = \frac{1}{4}$ et $v(\omega_2) = \frac{1}{2}$ et $u$ la fonction d'utilité $u(x) = \ln(x)$, pour $x > 0$.
   (a) (0.5 point) Déterminer pour $f$ sur quel intervalle de prix $p$ le décideur n'effectuera aucune transaction.
   (b) (1.5 points) Si le prix $p$ est $p = 2$, quelle position aura le décideur sur l'actif $f$ ? Trouver la quantité d'actif achetée ou vendue qui maximise l'utilité du décideur en fonction de $w$.
   (c) (0.5 point) Comment la richesse $w$ influence les choix du décideur ?