Session: Mai 2018.
Année d'étude: Magistère Banque-Finance première année.
Discipline: **Probabilités** (structure 2° semestre).
Titulaire du cours: M. Youcef ASKOURA.
Document(s) autorisé(s) : Calculatrice NON autorisée. Téléphone portable NON autorisé. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance quelconque.

Examen de Probabilités (5204): session mai 2018, durée 3h.

Exercice 1. (2 pts) Dire vrai ou faux, sans le justifier, pour chacune de ces assertions.

a) Une tribu est stable par intersection dénombrable d'événements, autrement dit, toute intersection dénombrable d'éléments d'une tribu est un élément de cette tribu.

b) Une tribu n'est pas nécessairement stable par union dénombrable d'événements, autrement dit, il n'est pas nécessaire que toute union dénombrable d'éléments d'une tribu soit un élément de cette tribu.

c) Il existe une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles $[0,1/n], n \in \mathbb{N}^*$, mais ne contenant pas l'ensemble $\{0\}$.

d) Une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles $[0,1/n], n \in \mathbb{N}^*$, contient forcément l'intervalle $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

À partir de maintenant, on considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},p)$ et $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. Soient, en outre, X et Y deux v.a. réelles sur $(\Omega,\mathcal{F},p)$ vérifiant $E(|X|) < +\infty$ et $E(|Y|) < +\infty$:

e) $E(X|\{\Omega,\emptyset\}) = E(X)$.

f) $E(ZX|\mathcal{F}_0) = ZE(X|\mathcal{F}_0)$, pour toute v.a. Z qui n'est pas $\mathcal{F}_0$-mesurable.

g) $E(Y|\mathcal{F}_1) = Y$, si $\sigma(Y)$ est indépendante de $\mathcal{F}_1$.

h) $E(Y|\mathcal{F}_1) = E(Y)$, si Y est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

i) $E[E(X|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_1] = E(X|\mathcal{F}_0)$, si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0$.

j) $E(X|Y) = E(X)$, si X et Y sont indépendantes.

Exercice 2. (3 pts) Considérons un couple aléatoire discret dont la loi conjointe est donnée dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	0	1	P_X
0	1/9	4/9	·
1	3/9	1/9	·
P_Y	·	·	1

Donner la loi de probabilité de $E(X|Y)$.

Exercice 3. (6 pts) Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$. On considère un couple aléatoire (X,Y) de densité conjointe

$$f(x,y) = 4y(x-y)e^{-(x+y)}1_E.$$

1. Calculer $E(X|Y)$.
2. Calculer $P(X < 1|Y)$.

Exercice 4.(6 pts) Deux joueurs A et B jouent à pile ou face. Le joueur A donne (resp. reçoit) 2 euros si face apparaît (resp. si pile apparaît). Le jeu est répété plusieurs fois : on note alors par $X = (X_n)_{n\geq 1}$, $X_n \in \{0, 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli B(1/2) définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'évènement $X_n = 1$ signifie que pile est apparu au $n^{\text{ième}}$ lancer de la pièce. On note $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$, la richesse du joueur A aux lancers correspondants. On supposera que la richesse initiale de A est nulle.

1. Exprimer Y_n en fonction des X_i.

2. Après chaque lancer, les joueurs connaissent la valeur obtenue aux lancers précédents, leur information peut donc être modélisée par la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, 1 \leq k \leq n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

3. Le joueur A décide d'arrêter de jouer s'il a déjà gagné 100 euros ou si le nombre de lancers atteint $N = 200$ et le joueur B est disposé à continuer à jouer jusqu'à ce que le joueur A s'arrête : le jeu s'arrête au temps $T = \inf\{n \geq 1 : Y_n = 100\} \wedge N$.

3.1. Montrer que T est un temps d'arrêt borné pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

On note E_{50} l'événement "$X_i = 1, i \in \{1, ..., 50\}$".

3.2. Donner $T(w)$ et $Y_{T(w)}(w)$ pour tout $w \in E_{50}$.

3.3. Donner $Y_{201\wedge T(w)}(w)$ pour tout $w \in E_{50}$.

4. Quelle est, avec cette stratégie T, l'espérance de gain du joueur A?

5. Existe-t-il une stratégie qui donne au joueur A une espérance de gain strictement positive en un temps borné ? Autrement dit, existe-t-il une v.a. τ à valeur dans $\mathbb{N}$, bornée, telle que pour tout n,$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ et telle que $E(Y_\tau) > 0$?

6. Soit $\kappa = \inf\{n \geq 0 : |Y_n = 2\}$. κ est-elle bornée presque sûrement?

Exercice 5. (3 pts) On admet que, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, toute martingale $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifie :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow E(Y_m|\mathcal{F}_n) = Y_n.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et T un temps d'arrêt borné adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que $E(X_T|\mathcal{F}_n) = X_{n\wedge T}, \forall n \geq 0$.