Examen de Calcul Stochastique (5037) **Janvier 2017**

Durée : 1h30
Sans document

Dans tout l'examen on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit sur cet espace un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On munit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la filtration naturelle du mouvement brownien définie par $\forall t,\ \mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. On obtient alors un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Questions de cours

1) Donner la définition d'un mouvement brownien.

2) Donner la définition d'une martingale (indexée par $t \in \mathbb{R}^+$).

3) Sur quelle classe de processus peut-on définir l'intégrale stochastique contre un mouvement brownien ?

Exercice 1

Soit c un réel positif fixé. Montrer que le processus défini par $\forall t \geq 0,\ X_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ est un mouvement brownien.

Exercice 2

Soit λ un réel fixé. On définit le processus M pour tout $t \geq 0$ par :

$$M_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$$

Q1) Montrer que le processus M est une martingale en utilisant la définition d'une martingale.

Q2) Calculer l'espérance et la variance de M_t.

Q3) Déterminer l'équation différentielle stochastique vérifiée par M.

Q4) Soit f une fonction suffisamment dérivable. Appliquer le lemme d'Ito à $f(M_t)$.

Q5) En déduire l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $f(M_t)$ est une martingale. Comment appelle-t-on ces fonctions ?

Problème : CIR et condition de Feller

Soient x, κ, θ et σ des réels strictement positifs, on appelle processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), tout processus vérifiant l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\begin{cases} dX_t &= \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

On admettra qu'il existe une unique solution à cette EDS. Par ailleurs, le processus solution est positif.

Un étudiant se souvient que sous une condition supplémentaire sur les paramètres du modèle (appelée « ***condition de Feller*** »), le processus X ne s'annule jamais. Il est alors **strictement positif**. Malheureusement, l'étudiant ne se rappelle plus du signe de cette condition, il hésite entre :

$$2\kappa\theta \leq \sigma^2 \text{ ou son contraire } 2\kappa\theta > \sigma^2$$

L'objectif du problème est de déterminer quel est le bon critère en passant par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

I - Un détour par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soient y, a et b des réels strictement positifs. Considérons un processus Y d'EDS :

$$\begin{cases} dY_t &= -aY_t dt + b dB_t \\ Y_0 &= y \end{cases}$$

Q1) On définit le processus $Z_t = \exp(at)Y_t$, ceci pour tout $t \geq 0$. En appliquant le lemme d'Ito ou une formule d'intégration par partie, déterminer l'EDS vérifiée par Z.

Q2) En déduire l'expression suivante pour le processus Y :

$$\forall t \geq 0\ , \quad Y_t = y\exp(-at) + b\int_0^t \exp(-a(t-s))dB_s$$

Q3) Calculer l'espérance et la variance de Y_t. Donner la loi de Y_t.

Q4) Exprimer $\mathbb{P}(Y_t < 0)$ à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale $N(0,1)$ ainsi que l'espérance et la variance de Y_t obtenues à la question précédente. Justifier que cette probabilité est strictement positive.

Q5) La processus Y est-il à trajectoire continue ? Pourquoi ? En déduire que la probabilité que Y s'annule au moins une fois sur $[0,t]$ est strictement positive *i.e.* $\mathbb{P}(\exists s \in [0,t] \ t.q.\ Y_s = 0) > 0$.

II - Conclusion sur la condition de Feller

Q6) Déterminer l'EDS vérifiée par le processus Y^2.

Q7) En déduire que Y^2 est un processus CIR. On identifiera les paramètres κ, θ et σ en fonction de a et b.

Q8) Conclure quant au signe de la condition de Feller.