Université Paris II **Mathématiques 3** (5007)
L2 Economie et Gestion **Cours de Mme HAYEK**
Janvier 2017. 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
Soit E et F des espaces vectoriels et ϕ une application linéaire de E dans F.
a) Définir $Ker\phi$.
b) Montrer que $Ker\phi = \{\vec{0}\}$ si et seulement si ϕ est injective.

Exercice 2
Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que:

$$f(\vec{u}) = f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 2x - y + 3z).$$

a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
b) Déterminer $Kerf$. En donner une base et la dimension.
c) Quelle est la dimension de $f(\mathbb{R}^3)$?
d) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$.
e) f est-elle injective, surjective, bijective?
f) Calculer la matrice A représentant f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 2a \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Pour quelles valeurs de a, A est-elle inversible?
b) Dans ces cas calculer l'inverse de A en fonction de a.
c) Ecrire le système suivant sous forme matricielle:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

d) Déduire de la question b) la solution du système.

Exercice 4
a) On rappelle que $\mathcal{M}(2,3)$ est l'espace vectoriel des matrices $(2,3)$. Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(2,3)$:

$\mathcal{A} = \{A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,3) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$

b) Donner une base de cet espace.
c) Quelle est la dimension de cet espace?