Examen de Calcul Stochastique — Jan. 2019

Durée : 1h30
Sans document

Dans tout l'examen on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sur cet espace, on définit un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$. On munit ensuite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la filtration naturelle du mouvement brownien, définie par $\forall t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. On obtient alors l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Questions de cours

1) Donner la définition du mouvement brownien.
2) Que vaut la variation totale du mouvement brownien sur un intervalle $[0, T]$? Que vaut sa variation quadratique sur ce même intervalle ?
3) Donner la définition d'un processus d'Ito ? Que peut-on dire de sa décomposition ?

Exercice 1

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale de carré intégrable, *i.e.* telle que $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$ pour tout t positif. Montrer que :
1) $\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 | \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 \qquad \forall t > s$
2) $\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2\right] - \mathbb{E}\left[M_s^2\right] \qquad \forall t > s$
3) La fonction φ définie par $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[M_t^2\right]$ est croissante.

Exercice 2

Soit $(S_t; t \geq 0)$ le processus défini par :

$$\forall t \geq 0\ ,\ S_t = x\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)$$

1) Appliquer le lemme d'Ito et déterminer l'equation différentielle stochastique suivie par S.

2) Pour quelles valeurs β, le processus $(S_t^\beta; t \geq 0)$ (S_t à la puissance β) est-il une martingale ?
Suggestion : Appliquer le lemme d'Ito.

Problème : CIR et condition de Feller

Soient x, κ, θ et σ des réels strictement positifs, on appelle processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), tout processus vérifiant l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\begin{cases} dX_t &= \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

On admettra qu'il existe une unique solution à cette EDS. Par ailleurs, le processus solution est positif.

Un étudiant se souvient que sous une condition supplémentaire sur les paramètres du modèle (appelée « ***condition de Feller*** »), le processus X ne s'annule jamais. Il est alors **strictement positif**. Malheureusement, l'étudiant ne se rappelle plus du signe de cette condition, il hésite entre :

$$2\kappa\theta \leq \sigma^2 \text{ ou son contraire } 2\kappa\theta > \sigma^2$$

L'objectif du problème est de déterminer quel est le bon critère en passant par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

I - Un détour par les processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soient y, a et b des réels strictement positifs. Considérons un processus Y d'EDS :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dY_t & = & -aY_t dt + bdB_t \\ Y_0 & = & y \end{array} \right.$$

1) On définit le processus $Z_t = \exp(at)Y_t$, ceci pour tout $t \geq 0$. En appliquant le lemme d'Ito ou une formule d'intégration par partie, déterminer l'EDS vérifiée par Z.

2) En déduire l'expression suivante pour le processus Y :

$$\forall t \geq 0 \ , \quad Y_t = y \exp(-at) + b \int_0^t \exp(-a(t-s)) dB_s$$

3) Calculer l'espérance et la variance de Y_t. Donner la loi de Y_t.

4) Exprimer $\mathbb{P}(Y_t < 0)$ à l'aide de la fonction de répartition d'une loi normale $N(0,1)$ ainsi que l'espérance et la variance de Y_t obtenues à la question précédente. Justifier que cette probabilité est strictement positive.

5) La processus Y est-il à trajectoire continue ? Pourquoi ? En déduire que la probabilité que Y s'annule au moins une fois sur $[0,t]$ est strictement positive *i.e.* $\mathbb{P}(\exists s \in [0,t] \ t.q. \ Y_s = 0) > 0$.

II - Conclusion sur la condition de Feller

6) Déterminer l'EDS vérifiée par le processus Y^2.

7) En déduire que Y^2 est un processus CIR. On identifiera les paramètres κ, θ et σ en fonction de a et b.

8) Conclure quant au signe de la condition de Feller.