

Les calculatrices et notes de cours sont interdites.

Question 1 (8 points)

Un investisseur dispose d'une richesse initiale w_0 . Sa fonction d'utilité $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , strictement croissante et concave. Deux actifs sont disponibles. L'un est risqué: son rendement noté R est aléatoire et prend un nombre fini de valeurs possibles. L'autre est non-risqué: son rendement noté r est connu. Un portefeuille est représenté par le montant α investi dans l'actif risqué. On suppose que l'investisseur choisit le portefeuille qui maximise l'espérance d'utilité de la richesse finale. Soit α^* le portefeuille ainsi choisi.

- Donner une interprétation économique des hypothèses de croissance stricte et de concavité de u .
- Donner la richesse finale de l'investisseur en fonction de α et écrire son problème de maximisation. Ecrire la condition nécessaire d'ordre 1 pour l'optimalité de α^* . Est-elle suffisante?
- A quelle condition sur r et R a-t-on $\alpha^* > 0$? Interpréter.
- On considère maintenant deux investisseurs, A et B, qui ne diffèrent que par leur fonction d'utilité que l'on note u et v respectivement. On suppose que A est plus averse au risque que B. Soient α_A^* et α_B^* leur portefeuille optimal. Montrer que $\alpha_A^* \leq \alpha_B^*$. Interpréter.

Question 2 (6 points)

On considère les deux loteries suivantes:

$$l = [\frac{1}{4}, 300; \frac{1}{4}, 100; \frac{1}{4}, 0; \frac{1}{4}, -200] \quad \text{et} \quad m = [\frac{1}{2}, 200; \frac{1}{2}, -100]$$

- Montrer qu'on a $\mathbb{E}[u(l)] \leq \mathbb{E}[u(m)]$ pour toute fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concave. Que peut-on en déduire sur l et m ?
- Donner la définition de la dominance stochastique d'ordre 2 (DS2). Tracer les fonctions de répartitions induites par l et m . Est-ce que m domine l au sens DS2 ?

Question 3 (6 points)

- Ecrire, de manière très précise, l'un des théorèmes de von Neumann et Morgenstern, de de Finetti ou de Savage au choix.
- Comparer ces trois théorèmes, en donnant par exemple les avantages et inconvénients de chacun d'entre eux.