

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant dans \mathbb{R}^2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ 2 - x_1 \leq 0 \\ 6 + 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_2 \leq 20 \end{array} \right.$$

- Montrer que ce problème admet une solution.
- Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème de calcul des variations suivant:

$$\begin{array}{l} \text{Maximiser } \int_0^1 (-\dot{x}^2(t) - x(t)) dt \\ x(0) = 1 \end{array}$$

- Ecrire les conditions nécessaires du 1^{er} ordre associées à ce problème.
- Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } \int_0^4 [-x(t) - 2v^2(t)] dt + x(4) \\ \dot{x}(t) = 2x(t) - v(t) \\ x(0) = 2, \quad v(t) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- Ecrire le Hamiltonien du problème.
- Ecrire l'équation adjointe, le principe du maximum de Pontryagin et la condition de transversalité.
- Ecrire le système d'équations différentielles et les conditions aux limites satisfaites par une trajectoire optimale et la variable adjointe associée.
- Résoudre le système.
- Résoudre le problème de contrôle optimal.