Economie de l'incertain et de l'information L3 (4304)

Durée de l'épreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

Rappel: Soit X une variable aléatoire continue uniformément distribuée sur l'intervalle $[a, b]$. Les expressions respectives de la fonction de densité, de l'espérance et de la variance de X sont les suivantes:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{pour} \quad x \in [a,b] \quad , \quad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 1 - Demande d'assurance

Considérons un individu possédant une richesse certaine w ainsi qu'une voiture de valeur v. En utilisant sa voiture il fait face à un risque d'accident. Nous noterons X la variable aléatoire décrivant le taux de sinistralité (pourcentage de la valeur de la voiture détruite). Cette variable est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$X \sim U[0,1]$$

Cet individu a la possibilité de contracter une assurance lui permettant de toucher une indemnité $I = avX$ si il paye une prime d'assurance d'un montant $p = (1+\lambda)\mathbb{E}(I)$. Les variables $a \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$ représentent respectivement le taux de couverture (choisi par l'agent) et le taux de charge. On note $u(.)$ la fonction d'utilité élémentaire de cet individu avec $u'(.) > 0$.

1) Donnez l'expression de la richesse aléatoire de cet individu pour un taux de couverture a donné.

2) Montrez que la dérivée de l'espérance d'utilité de cet individu par rapport à a lorsque la couverture est totale (au point $a = 1$) peut s'écrire:

$$\left.\frac{\partial \mathbb{E}u(W(a))}{\partial a}\right|_{a=1} = -\frac{\lambda v}{2} u'\left(w + v - \frac{(1+\lambda)av}{2}\right)$$

Justifiez soigneusement toutes les étapes du raisonnement vous permettant d'aboutir à ce résultat.

3) A partir du résultat obtenu à la question 2) montrez que lorsque $\lambda > 0$, le taux de couverture a^* choisi par l'individu est inférieur à 1.

4) A partir du résultat obtenu à la question 2) déterminez le taux de couverture a^* choisi par l'individu lorsque $\lambda = 0$ et que l'individu est risquophobe. Même question pour un individu risquophile.

5) Supposons que la fonction d'utilité de l'individu est de type exponentielle négative de paramètre θ:

$$u(y) = -\exp(-\theta y) \qquad \text{avec} \qquad \theta > 0$$

Donnez l'expression de la prime de risque marginale (dérivée de la prime de risque par rapport à a) et de l'espérance de gain marginale (dérivée de l'espérance de gain par rapport à a).

6) Représentez sur un même graphique (en fonction de a) la prime de risque marginale et l'espérance de gain marginale. Vous ferez apparaitre sur ce graphique la taux de couverture optimal (a^*). [Une attention particulière sera donnée à la précision de cette représentation]

7) Déterminez la valeur de a^* en fonction de v, λ et θ.

8) A partir du graphique tracé à la question 6) et de la valeur de a^* obtenue à la question 7), représentez graphiquement l'effet d'une augmentation de v sur a^*. [Une attention particulière sera donnée à la précision de cette représentation]

Exercice 2 - Aléa moral

Considérons le problème d'aléa moral suivant entre le propriétaire d'une entreprise (principal) et un manager (agent): Il existe deux niveaux d'effort possibles: $e \in \{e_H, e_L\}$, e_H représentant l'effort haut et e_L l'effort bas. Deux niveaux de bénéfices sont réalisables respectivement notés b_H et b_L avec $b_H > b_L$. Si l'effort du travailleur est e_H l'entreprise fait des bénéfices hauts (b_H) avec une probabilité $p(e_H) = 3/4$, si cet effort est e_L la probabilité de bénéfices hauts est seulement $p(e_L) = 1/4$. L'utilité de l'agent dépend du salaire qu'il reçoit (w) et de son effort e:

$$u_a(w, e) = v(w) - c(e) \qquad \text{avec} \qquad v'(w) > 0,$$

$c(e_L) = 0$ et $c(e_H) = 2$. De plus nous supposons que l'agent a une utilité de réservation $\bar{u} \geq 0$. L'utilité du principal dépend des bénéfices de l'entreprise (b) et du salaire qu'il verse (w):

$$u_p(\pi, w) = b - w$$

L'effort entrepris par l'agent est supposé ne pas être observable par le principal.

Partie 1: Agent neutre au risque. Dans cette partie nous supposerons que $v(w) = w$ et que le principal souhaite que l'agent choisisse l'effort haut e_H.

1) Du point de vu de l'investisseur il existe une infinité de contrats (w_L, w_H) optimaux. Quels sont leurs caractéristiques? Justifiez soigneusement votre réponse.

2) Un contrat optimal possible consiste à saturer simultanément la contrainte d'incitation et de participation. Déterminez les valeurs de w_H et de w_L qui correspondent à un tel contrat.

3) Supposons qu'il existe une contrainte de responsabilité limitée de la forme $w_L \geq 0$. Déterminez un contrat (w_H, w_L) optimal du point de vue du principal dans le cas où $\bar{u} \geq 1$. Déterminez l'espérance d'utilité du principal lorsque ce contrat est proposé.

4) Reprenez la question 3) en supposant que $\bar{u} < 1$.

5) Comparez les espérances d'utilité obtenues par le principal avec et sans contrainte de responsabilité limité lorsque $\bar{u} < 1$. Commentez en exposant clairement les mécanismes à l'oeuvre.

Partie 2: Agent averse au risque. Dans cette partie nous supposerons que $v(w) = \sqrt{w}$, $\bar{u} = 2$ et que le principal souhaite que l'agent choisisse l'effort haut e_H.

6) Nous considérerons dans cette question que l'effort de l'agent est observable. Posez le problème d'optimisation du principal dans ce cas. Déduisez-en le Lagrangien associé et les deux conditions du premier ordre.

7) A partir des conditions du premier ordre trouvées à la question précédente, déterminez le contrat optimal dans ce cas ainsi que l'espérance d'utilité du principal.

8) Considérons maintenant le cas où l'effort est inobservable. Déterminez le contrat optimal dans ce cas ainsi que l'espérance d'utilité du principal. [Vous pouvez appliquer directement les résultats vus en cours sans les (re)démontrer].

9) Comparez les espérances d'utilité obtenues dans les questions 7) et 8). Commentez en exposant clairement les mécanismes à l'oeuvre.