Econométrie

Licence Economie-Gestion. Parcours Analyse Economique.

Professeur Georges Bresson

Session Janvier 2019

1. **Exercice 1** (3 points) - On considère le modèle de régression simple avec une constante:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \ , \ i = 1, ..., N$$

où α et β sont des scalaires et où u_i est indépendant des X_i.

   (a) On suppose que les u_i sont indépendants et identiquement distribués selon une loi Gamma avec une densité $f(u_i) = (1/\Gamma(\theta))u_i^{\theta-1}e^{-u_i}$ où $u_i \geq 0, \ \theta > 0, \ E[u_i] = \theta$ et $Var[u_i] = E[s^2] = \theta$. Montrez que $\left(\widehat{\alpha}_{MCO} - s^2\right)$ est un estimateur sans biais de α.

   (b) On suppose que les u_i sont indépendants et identiquement distribués selon une loi du χ^2 à ν degrés de liberté où $E[u_i] = \nu$ et $Var[u_i] = E[s^2] = 2\nu$. Montrez que $\left(\widehat{\alpha}_{MCO} - s^2/2\right)$ est un estimateur sans biais de α.

   (c) On suppose que les u_i sont indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle avec une densité $f(u_i) = (1/\theta)e^{-u_i/\theta}$ où $u_i \geq 0, \ \theta > 0, \ E[u_i] = \theta$ et $Var[u_i] = E[s^2] = \theta^2$. Montrez que $(\widehat{\alpha}_{MCO} - s)$ est un estimateur convergent de α. Pour cela, on utilisera la limite en probabilité: $p\lim_{N\to\infty} (\widehat{\alpha}_{MCO} - s)$.

2. **Exercice 2** (4 points) - Soit $Y = X\beta + u$ avec $u \sim N\left(0, \sigma^2 I_N\right)$ où $X_i = [X_{1i} \ X_{2i}]$, $i = 1, ..., N$ et où I_N est une matrice identité de taille (N, N). On suppose que la variable X_{2i} est corrélée avec les perturbations u_i et on définit un vecteur de variables instrumentales: $Z_i = [X_{1i} \ Z_{2i}]$. Les instruments Z sont supposés être non corrélés avec u: $E[Z'u] = 0$ et l'estimateur à variables instrumentales $\widehat{\beta}_{IV}$ est défini par:

$$\widehat{\beta}_{IV} = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i' X_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} Z_i' Y_i = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

Posons

$$\frac{1}{N}Z'X = \Sigma_{ZX} \ , \ \frac{1}{N}Z'Z = \Sigma_{ZZ} \text{ et } \frac{1}{N}X'Z = \Sigma_{XZ}$$

Montrez que l'estimateur centré dilaté converge en loi vers la loi normale:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\beta}_{IV} - \beta\right) \sim N\left(0, \sigma^2 \left[\Sigma_{XZ}.\Sigma_{ZZ}^{-1}.\Sigma_{ZX}\right]^{-1}\right)$$

3. **Exercice 3** (6 points) - Soit le modèle linéaire général

$$y = X\beta + u = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \ , \ u \sim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$$

où I_T est une matrice identité de taille (T, T).

   (a) Ecrivez la log-vraisemblance du modèle et déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance de β et de σ^2.

   (b) Ecrivez le score $S(\beta) = \partial LogL\left(\beta, \sigma^2\right)/\partial\beta$ et montrez que la matrice d'information est bloc-diagonale.

(c) On souhaite tester l'hypothèse nulle:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1^0 \text{ versus } H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^0$$

Dérivez le test de Wald (W) de ce test d'hypothèse et montrez que[1]:

$$W = \left(\beta_1^0 - \widehat{\beta}_1\right)' \left[X_1' \overline{P}_{X_2} X_1\right] \left(\beta_1^0 - \widehat{\beta}_1\right) / \widehat{\sigma}^2$$

où $\widehat{\beta}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance non contraint, $\widehat{u} = y - X\widehat{\beta}$, $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{u}'\widehat{u}/T$ et $\overline{P}_{X_2} = I_T - X_2 \left(X_2' X_2\right)^{-1} X_2'$.

4. **Exercice 4** (7 points) - Un modèle à équations simultanées à correction d'erreur est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta \ln Y_{1t} & = & \phi_{12} \Delta \ln Y_{2t} + \phi_{13} \Delta \ln Y_{3t} \\ & & -\theta_1 \left[\ln Y_{1,t-1} - (\alpha_1 + \gamma_{12} \ln Y_{2,t-1} + \gamma_{13} \ln Y_{3,t-1})\right] + \varepsilon_{1t} \\ \Delta \ln Y_{2t} & = & \phi_{21} \Delta \ln Y_{1t} + \phi_{23} \Delta \ln Y_{3t} \\ & & -\theta_2 \left[\ln Y_{2,t-1} - (\alpha_2 + \gamma_{21} \ln Y_{1,t-1} + \gamma_{23} \ln Y_{3,t-1})\right] + \varepsilon_{2t} \end{array} \right. \qquad (1)$$

où $\Delta \ln Y_{1t} = \ln Y_{1t} - \ln Y_{1,t-1}$. Les variables $\Delta \ln Y_{1t}$ et $\Delta \ln Y_{2t}$ sont considérées comme endogènes et $\ln Y_{1,t-1}$ et $\ln Y_{2,t-1}$ comme prédéterminées. Les variables $\Delta \ln Y_{3t}$ et $\ln Y_{3,t-1}$ sont considérées comme exogènes.
Dans ce modèle, les coefficients d'ajustement θ_j, $j = 1, 2$ doivent être strictement positifs et définis par $0 < \theta_j < 1$ pour assurer la stabilité de chaque équation du système. Les termes entre crochets $[\ln Y_{j,t-1} - (\alpha_j + \gamma_{jl} \ln Y_{l,t-1} + \gamma_{j3} \ln Y_{3,t-1})]$, $j, l = 1, 2$ sont appelées "erreurs d'équilibre", d'où l'expression de "modèle à correction d'erreur". L'expression $\ln Y_{j,t} = \alpha_j + \gamma_{jl} \ln Y_{l,t} + \gamma_{j3} \ln Y_{3,t-1}$, $j, l = 1, 2$ est appelée "relation d'équilibre" (ou "équilibre de long terme") dans laquelle γ_{jl} et γ_{j3} sont les coefficients de long terme, les coefficients de court terme étant donnés par ϕ_{jl} et ϕ_{j3}.
On dispose des cours de clôture de 3 cryptomonnaies en US$ (Bitcoin (BTC), Monero (XMR) et Litecoin (LTC)) sur la période du 21 mai 2014 au 10 novembre 2018, soit 1635 observations journalières (voir figure 1). Les variables $\Delta \ln Y_{1t} = d\ln\_BTC$, $\Delta \ln Y_{2t} = d\ln\_XMR$ et $\Delta \ln Y_{3t} = d\ln\_LTC$ sont donc les rendements composés journaliers. $\ln Y_{1,t-1} = \ln\_BTC\_1$, $\ln Y_{2,t-1} = \ln\_XMR\_1$ et $\ln Y_{3,t-1} = \ln\_LTC\_1$ sont les logarithmes des cours de clôture décalés d'une période. On estime un modèle non contraint

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\ln\_BTC & = & \beta_{10} + \beta_{11} d\ln\_XMR + \beta_{12} d\ln\_LTC + \beta_{13} \ln\_BTC\_1 \\ & & +\beta_{14} \ln\_XMR\_1 + \beta_{15} \ln\_LTC\_1 + \varepsilon_{1t} \\ d\ln\_XMR & = & \beta_{20} + \beta_{21} d\ln\_BTC + \beta_{22} d\ln\_LTC + \beta_{23} \ln\_XMR\_1 \\ & & +\beta_{24} \ln\_BTC\_1 + \beta_{25} \ln\_LTC\_1 + \varepsilon_{2t} \end{array} \right. \qquad (2)$$

On estime le système complet (2) par les GMM.

(a) Rappelez succinctement le principe de la méthode des GMM.

(b) Etudiez les conditions d'identification (conditions d'ordre seulement) de chacune des équations du système (2). Qu'en déduisez-vous?

On utilise une correction HAC pour gérer l'hétéroscédasticité et l'autorrélation des résidus. Les instruments sont: $\Delta \ln Y_{j,t-2}$, $\Delta \ln Y_{j,t-3}$, $\ln Y_{j,t-1}$, $\ln Y_{j,t-2}$ et $\ln Y_{j,t-5}$ pour $j = 1, 2, 3$. La commande Stata utilisée est

```
gmm (eq1:dln_BTC -  {eq_BTC: _cons dln_XMR dln_LTC  ln_BTC_1 ln_XMR_1 ln_LTC_1}) ///
    (eq2:dln_XMR -  {eq_XMR: _cons dln_BTC dln_LTC ln_XMR_1 ln_BTC_1 ln_LTC_1 }), ///
instruments(eq1 eq2 : dln_BTC_2 dln_BTC_3 dln_LTC_2 dln_LTC_3 dln_XMR_2  dln_XMR_3 ///
                     ln_BTC_1 ln_BTC_2 ln_BTC_5 ln_LTC_1 ln_LTC_2 ln_LTC_5 ///
                      ln_XMR_1 ln_XMR_2 ln_XMR_5) winitial(unadjusted, independent) ///
wmatrix(hac nwest opt) twostep
```

[1]On pourra utiliser la formule de l'inverse partitionnée:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

où $B_{11} = \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)$.

c) Interprétez les résultats de la table 1.

d) Quelles conclusions tirez-vous du test d'Hansen-Sargan de restriction de sur-identification?

e) On suspecte la non-exogénéité des instruments `ln_BTC_1` et `ln_XMR_1`. Commentez le test de différence de statistiques de Sargan de la table 1. Que concluez-vous?

f) Ré-écrivez le modèle (1) avec les valeurs estimées issues de l'estimation du système (2). Donnez les relations d'équilibre. Interprétez les valeurs estimées des coefficients ϕ_{jl} et γ_{jl}, $j = 1, 2$ et $l = 1, 2, 3$.

g) On calcule les valeurs estimées `BTC_GMM` et `XMR_GMM` des cours de clôture journaliers des deux cryptomonnaies BTC et XMR par les relations $\widehat{Y}_{jt} = \exp\left(\ln Y_{j,t-1} + \widehat{\Delta \ln Y_{jt}}\right)$, $j = 1, 2$. Commentez les résultats de la table 2 et la figure 2.

Aucun document autorisé.

Calculatrices et tables statistiques autorisées.

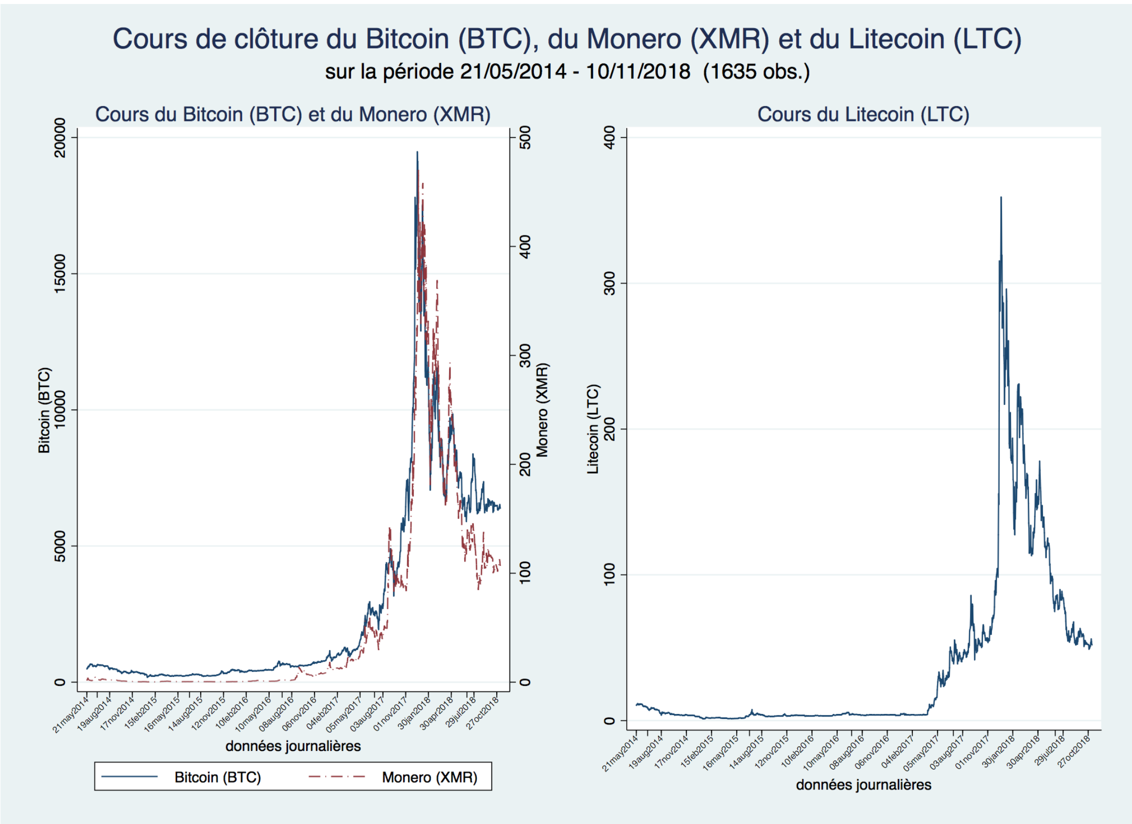

Figure 1: Cours de clôture journaliers des cryptomonnaies.

```
GMM estimation

Number of parameters =  12
Number of moments    =  32
Initial weight matrix: Unadjusted                 Number of obs   =      1,630
GMM weight matrix:     HAC Bartlett 10
                       (lags chosen by Newey-West)

------------------------------------------------------------------------------
             |                 HAC
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
eq_BTC       |
     dln_XMR |   .4695586   .1343143     3.50   0.000     .2063075    .7328097
     dln_LTC |   .2368199    .165725     1.43   0.153    -.0879951    .5616348
    ln_BTC_1 |  -.0175178   .0073367    -2.39   0.017    -.0318975   -.0031382
    ln_XMR_1 |   .0049314   .0020542     2.40   0.016     .0009051    .0089576
    ln_LTC_1 |   .0077227    .003991     1.94   0.053    -.0000995     .015545
       _cons |   .0952095    .039462     2.41   0.016     .0178653    .1725537
-------------+----------------------------------------------------------------
eq_XMR       |
     dln_BTC |   .9526656   .2997427     3.18   0.001     .3651807     1.54015
     dln_LTC |  -.0289375   .2973961    -0.10   0.922    -.6118232    .5539482
    ln_XMR_1 |  -.0095349   .0027075    -3.52   0.000    -.0148414   -.0042284
    ln_BTC_1 |   .0310994   .0086816     3.58   0.000     .0140837    .0481151
    ln_LTC_1 |  -.0127124   .0052822    -2.41   0.016    -.0230654   -.0023595
       _cons |  -.1700824   .0468516    -3.63   0.000    -.2619098    -.078255
------------------------------------------------------------------------------
HAC standard errors based on Bartlett kernel with 14 lags.
   (Lags chosen by Newey-West method.)
Instruments for equation eq1: dln_BTC_2 dln_BTC_3 dln_LTC_2 dln_LTC_3 dln_XMR_2 dln_XMR_3
    ln_BTC_1 ln_BTC_2 ln_BTC_5 ln_LTC_1 ln_LTC_2 ln_LTC_5 ln_XMR_1 ln_XMR_2 ln_XMR_5 _cons
Instruments for equation eq2: dln_BTC_2 dln_BTC_3 dln_LTC_2 dln_LTC_3 dln_XMR_2 dln_XMR_3
    ln_BTC_1 ln_BTC_2 ln_BTC_5 ln_LTC_1 ln_LTC_2 ln_LTC_5 ln_XMR_1 ln_XMR_2 ln_XMR_5 _cons

Test of overidentifying restriction:
Hansen's J chi2(20) = 13.8738 (p = 0.8368)


-------------------------------------------------------------------------------
Hansen J statistic (overidentification test of all instruments):        13.8738
                                                 Chi-sq(20) P-val =      0.8368
-orthog- option:
Hansen J statistic (eqn. excluding suspect orthog. conditions):         13.4944
                                                 Chi-sq(16) P-val =      0.6363
C statistic (exogeneity/orthogonality of suspect instruments):           0.3794
                                                 Chi-sq(4) P-val =       0.9841
Instruments tested:   ln_BTC_1 ln_XMR_1
------------------------------------------------------------------------------
```

Table 1: Estimation GMM et test de différence de statistiques de Sargan.

variable	mean	sd	min	max
BTC	2704.257	3690.043	176.9	19475.8
BTC_GMM	2706.138	3703.824	179.8854	20320.42
XMR	53.72015	90.5108	.220121	470.29
XMR_GMM	53.68726	90.23278	.2386122	452.2998

Table 2: Statistiques sur les valeurs observées et estimées des cours de clôture journaliers du Bitcoin (BTC) et du Monero (XMR).

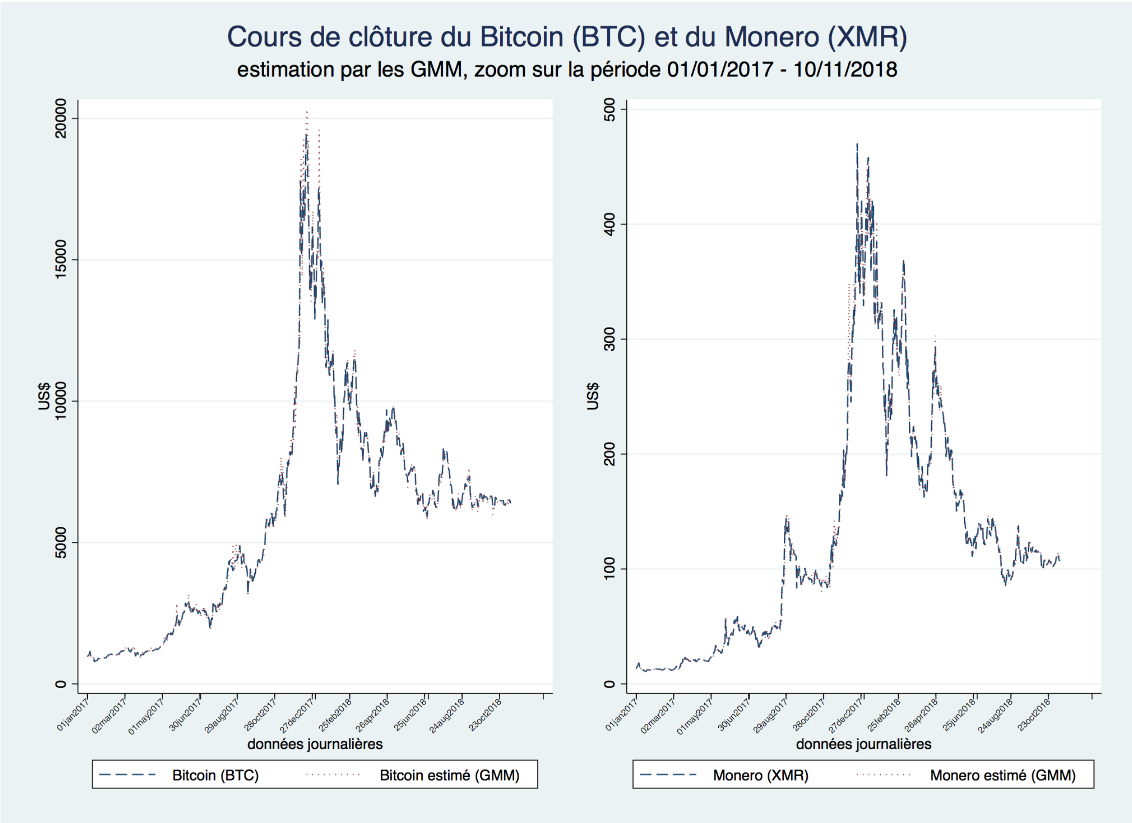

Figure 2: Cours de clôture journaliers du Bitcoin (BTC) et du Monero (XMR). Valeurs observées et estimées.