

Melun

Année d'étude: Deuxième année de Licence économie-gestion mention administration économique et sociale

Discipline: Techniques Quantitatives: Statistiques
(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1)

Session: Janvier 2017

Titulaire(s) du cours: M.Massimiliano MATTERA

Document(s) autorisé(s): Calculatrice - Tout autre document est interdit.

Le sujet est composé de questions de cours et de trois exercices indépendants.

Questions de cours :

1. Pour les variables aléatoires de loi suivantes énoncer et démontrer la propriété d'absence de mémoire:
 - a) Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 - b) Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Énoncer les théorèmes de stabilité pour:
 - a) La loi Binômiale.
 - b) La loi de Poisson.
 - c) La loi Normale.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - a) Rappeler l'expression de sa densité, de sa fonction de répartition et les valeurs de son espérance et de sa variance.
 - b) Tracer l'allure de sa fonction de répartition.
4. Énoncer le Théorème Central Limite.

Exercice 1 :

A. On lance 8 fois une pièce de monnaie ayant une probabilité $p = \frac{1}{3}$ de tomber sur pile.

On suppose les lancers indépendants et on note X le nombre de lancers ayant donné pile.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux piles?

B. On lance cette même pièce de monnaie indéfiniment et on note Y la variable aléatoire égale au rang du lancer donnant pile pour la première fois et Z le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois un deuxième pile.

Ainsi, par exemple, si la suite des lancers obtenus est: FFPFPFFF... alors $Y = 3$ et $Z = 5$.

1. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
- b) Calculer $P([Y \geq 3])$
- c) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
- b) Calculer $P([Z \geq 4])$
- c) Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 2 :

On tire 3 fois **sans remise** une boule dans une urne contenant 6 boules noires et 4 boules blanches.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Les tirages sont-ils indépendants? Justifier votre réponse.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
4. Déterminer l'espérance et la variance de X .
5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 3 :

Dans une usine de fabrication, le nombre de pièces défectueuses dans la production d'un jour est modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre 2. Un nouveau protocole de qualité, lorsqu'il est respecté, réduit le paramètre de la variable aléatoire X à 1. Par expérience, on sait par ailleurs que la probabilité a priori que le nouveau protocole de qualité est respecté est de 50%. Lors d'une inspection sur place on trouve dans la production du jour exactement 1 pièce défectueuse.

Quelle est la probabilité a posteriori que le nouveau protocole de production ait été respecté?