Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) - Melun **UEF1 - 5007**
2ème année Licence économie-gestion mention économie et gestion
Mathématiques 3 - Cours de Mme Morhaim
Session : janvier 2017

Durée : 1h30
Matériel autorisé : aucun. Les calculatrices sont interdites.

Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1

1) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2z = 0\}$.
a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Donner une base et la dimension de E.
2) Soit a un réel. A quelle(s) condition(s) sur a l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2z = a\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

On considère un paramètre réel m et le système d'inconnues le triplet (x, y, z) à coordonnées réelles

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +my & -m^2 z & = & 1-m \\ -mx & +y & +m^2 z & = & 2m \\ -m^2 x & +my & +mz & = & 2m \end{array}\right.$$

1) Ecrire le système sous forme matricielle $A_m X = B$.
2) Calculer $det A_m$. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A_m est-elle inversible ?
3) Résoudre le système en fonction du paramètre réel m.
4) Résoudre le système lorsque $m = 2$ (on pourra bien entendu déduire ce résultat de la question 3).

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer $A^2 - 2AB$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 4

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2z, x - y + z, z)$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $Ker(f)$ et la dimension de $Ker(f)$.
3) Déterminer $Im(f)$ et la dimension de $Im(f)$.
4) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e'_1 = (2, 0, 0), e'_2 = (0, 2, 1)$ et $e'_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que le système $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6) Ecrire la matrice A représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. A est-elle inversible ?
7) Ecrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.
8) Calculer l'inverse de P par la méthode de Gauss-Jordan.
9) Ecrire la matrice M représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
10) f est-elle un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?