Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II) **U.E.F.2**

Droit - Economie - Sciences Sociales **5289**

Melun

Session : Septembre 2018

Année d'étude : Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion

Discipline : ***Statistiques 4***

(Unité d'Enseignements Fondamentaux 2)

Titulaire(s) du cours :

M. Matthieu RICHARD

Document(s) autorisé(s) :

Ni document ni calculatrice ne sont autorisés.

Université Paris II - Institut de droit et d'économie de Melun Statistiques 4 (5289)
Licence 2 Sciences économiques et Gestion Cours de M. RICHARD

Septembre 2018

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

On pourra utiliser le résultat suivant : $\frac{1}{6} \simeq 0,167$.

D'autre part, les résultats numériques finaux pourront être arrondis.

Exercice 1

Une société de biotechnologies réalise une étude clinique sur l'efficacité d'un nouveau traitement contre les allergies à l'arachide. Elle constitue donc un échantillon de patients atteints d'allergie à l'arachide sur lesquels elle teste son nouveau traitement. On suppose que, pour chaque patient allergique à l'arachide, la probabilité que le nouveau traitement soit efficace vaut p. La société souhaite estimer p.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le nouveau traitement est efficace sur le i-ème patient de l'échantillon. Les variables aléatoires X_1,...,X_n suivent donc la même loi et sont supposées indépendantes. On note x_1,...,x_n les réalisations des variables aléatoires X_1,...,X_n.

1. Construction d'estimateurs
(a) Quelle est la loi générale que suivent chacune des variables aléatoires X_1, X_2,...,X_n ? Rappeler son espérance et sa variance.
(b) Déterminer l'estimateur de p obtenu par la méthode des moments d'ordre 1.
(c) Montrer que la vraisemblance de $(x_1, ..., x_n)$ est donnée par :

$$L(x_1, ..., x_n; p) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \times (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

(d) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de p.

2. On s'intéresse désormais à l'estimateur $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ de p.
(a) Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de p.
(b) Montrer que l'information de Fisher apportée par l'échantillon sur le paramètre p est $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$.
(c) Montrer que l'estimateur $\overline{X_n}$ est efficace.

3. Estimation de p
La société de biotechnologies a testé son nouveau traitement sur 100 patients. Le test s'est révélé efficace pour 80 patients.
(a) En utilisant l'estimateur le plus adapté (on justifiera son emploi), donner une estimation ponctuelle non biaisée de p.
(b) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance 95 %.

4. L'efficacité du traitement final a été améliorée et portée à 90 %. Calculer la probabilité que sur 100 personnes allergiques utilisant le nouveau traitement, le traitement soit efficace sur au moins 80 d'entre-eux.

Exercice 2

On suppose que l'amende infligée par un tribunal à une personne ayant commis un certain type de délit est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance m inconnue et d'écart-type $\sigma = 50$ euros.

1. Quel est l'estimateur naturel de m ? Rappeler ses propriétés. *(Aucune justification n'est demandée)*
2. On a relevé les amendes (en euros) infligées lors de 9 procès pour ce type de délit :
120, 100, 80, 200, 150, 50, 100, 150, 40.
(a) Donner une estimation ponctuelle non biaisée de m.
(b) Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau de confiance 90 % pour m.
3. Un accusé pour ce type de délit peut-il être quasiment certain de ne pas recevoir une amende de plus de 220 euros ?

Exercice 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$P(X_n = 10) = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $P(X_n = 0) = \frac{1}{n+1}$.
Étudier la convergence en loi, en probabilité et en moyenne quadratique de la suite (X_n).

Exercice 4

Une entreprise veut estimer le temps d'attente d'un client lorsque celui-ci appelle le service client de l'entreprise. On suppose que le temps d'attente d'un client appelant le service client de l'entreprise est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle qu'alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

On construit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ issu de X. On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour chaque question, indiquer **sans justification** sur votre copie <u>la</u> bonne réponse. *Le barème appliqué tiendra uniquement compte du nombre de bonnes réponses.*

1. Un client appelant le service client a le plus de chances d'attendre...
A. entre 0 et 1 minute. B. entre 1 et 2 minutes. C. entre 2 et 3 minutes. D. entre 3 et 4 minutes.

2. Quel est l'estimateur de λ obtenu par la méthode des moments d'ordre 1 ?
A. $\overline{X_n}$. B. $\frac{1}{\overline{X_n}}$. C. $\overline{X_n}^2$. D. $\frac{1}{\overline{X_n}^2}$.

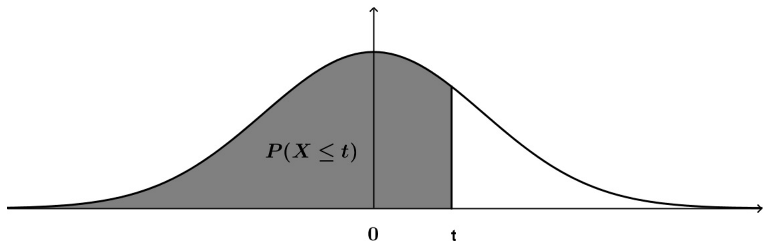
3. D'après le théorème central limite, la statistique $\overline{X_n}$ suit de façon approchée une loi normale...
A. d'espérance $\frac{1}{\lambda}$ et d'écart-type $\frac{1}{\lambda^2\sqrt{n}}$. B. d'espérance $\frac{1}{\lambda}$ et d'écart-type $\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.
C. d'espérance $\frac{1}{\lambda}$ et d'écart-type $\frac{1}{\lambda\sqrt{n}}$. D. d'espérance λ et d'écart-type $\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

On suppose que $n = 5$. On observe les temps d'attente de cinq clients ayant appelé le service client et prélevés au hasard. Les résultats sont les suivants : 1 minute et 20 secondes, 2 minutes et 40 secondes, 20 secondes, 3 minutes, 2 minutes et 40 secondes.

4. Donner une estimation non biaisée de λ.
A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 4. D. $\frac{1}{4}$.

Loi normale centrée réduite
$X \sim \mathcal{N}(0;1)$

Fonction de répartition $F(t) = P(X \leq t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

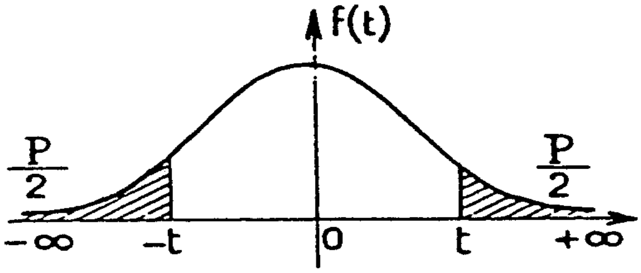
La valeur de t se lit en additionnant les valeurs en en-tête de ligne et de colonne. La valeur de $F(t)$ correspondante est la valeur lue dans la case située sur la même ligne et la même colonne.

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	4,0	5,0
F(t)	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,99997	0,9999997

TABLE DE DISTRIBUTION DE t
(Loi de Student)

Valeurs de t ayant la probabilité *P* d'être dépassées en valeur absolue



P / *ν*	0,900	0,800	0,500	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,158	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,695	1,358	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,679	1,295	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291