Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.F.2/5287
Droit-Economie-Sciences Sociales Melun

Session :	Mai 2018.
Année d'étude :	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline :	***Mathématiques 4*** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 2).
Titulaire du cours :	M. Lorenzo BASTIANELLO.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

Examen de Mathématiques 4 (5287)

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Partie 1. (9 points) Questions Choix Multiple. Instructions :
- TRÈS IMPORTANT : ÉCRIRE LES RÉPONSES DU QCM SUR LA COPIE (Par exemple 7) = (c)). NE RIEN MARQUER SUR LE SUJET.
- Seulement une réponse est correcte, ne pas fournir les calculs.
- Réponse correcte, 1 points. Réponse incorrecte ou pas de réponse, 0 points.

1. L'équation différentielle $e^x y' + 3y = x^2 y$ est

(a) À variables séparées mais pas linéaire.
(b) Linéaire mais pas à variables séparées.
(c) À variables séparés et linéaire.
(d) Pas à variables séparées et pas linéaire.

2. Quels sont les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ telles que l'équation différentielle $y' = \frac{y+t^2-2y\sqrt{t}}{t}$ est de la forme $y' + a(t)y = b(t)$

(a) On ne peut pas répondre.
(b) $a(t) = 2\sqrt{t} - 1$ et $b(t) = t^2$
(c) $a(t) = \frac{1-2\sqrt{t}}{t}$ et $b(t) = t$
(d) $a(t) = \frac{2\sqrt{t}-1}{t}$ et $b(t) = t$.

3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{1+x}y = 1 + x$. ($k$ est une constante réelle).

(a) $y(x) = 1 + x + k$
(b) $y(x) = (1 + ke^{-x})(1 + x)$
(c) $y(x) = k(1 + x)$
(d) $y(x) = e^{-x}(x + \frac{x^2}{2} + k)(1 + x)$

4. Sachant que 1 est une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ les autres sont

(a) -1, 2 (b) 2, -3 (c) -2, 3 (d) -1, 3

5. $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. La valeur propre correspondante est

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) -3

6. Considérons une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 2x^2 + 10xy - 3y^2$ est

(a) Semi-définie positive mais pas définie positive
(b) Définie positive
(c) Semi-définie négative
(d) Indéfinie.

7. Considérons les séries

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^k$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(k+2)!}$ (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Laquelle (lesquelles) diverge (divergent).

(a) Aucune
(b) Seulement la (iii)
(c) La (iii) et la (iv)
(d) Seulement la (iv)

8. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Le système (S) $\begin{cases} 3x + 5y + z = 3m \\ 6x + 10y + 2z = 3m \end{cases}$ admet

(a) Aucune solution
(b) Une infinité de solutions
(c) Soit une infinité de solutions soit aucune
(d) Une unique solution

9. Laquelle entre les séries suivantes est absolument convergente ?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{0.998}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^{1.001}}$

Partie 2. (13 points) Questions ouvertes.

1. (5 points) On veut étudier la convergence de la série de terme général $a_n = \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ selon la variable x.

   1. En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que $\sum |a_n|$ converge si $-3 < x < -1$.
   2. Monter que la série diverge si $x \geq -1$.
   3. Monter que la série converge si $x = -3$?

2. (4 points) Résoudre l'équation différentielle suivante : $z' - 3t^2 z = e^t(1 - 3t^2)$, $z(0) = 2$.

3. (4 points) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   1. Justifier, sans calculs, que A est diagonalisable.
   2. Déterminer les valeurs propres de A.
   3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$
   4. Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{72}$. La matrice B est-elle diagonalisable ?