Université PANTHÉON-ASSAS (PARIS II) U.E.F.2/5287
Droit-Economie-Sciences Sociales Melun

Session :	Mai 2019.
Année d'étude :	Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion.
Discipline :	***Mathématiques 4*** (Unité d'Enseignements Fondamentaux 2).
Titulaire du cours :	M. Lorenzo BASTIANELLO.
Document(s) autorisé(s) :	Calculatrice autorisée. Le téléphone portable n'est pas autorisé comme calculette. Documents interdits, ainsi que tout appareil électronique permettant une connexion à distance.

Examen de Mathématiques 4 (5287)

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

1. (7 points) Soit $(a_n)_n$ une suite réelle.
   1. (1 point) Donner la définition de : la série de terme général a_n converge.
   2. (0.5 point) Donner la définition de : la série de terme général a_n est à terme positif.
   3. (0.5 point) Donner la définition de : la série de terme général a_n est absolument convergente.
   4. (3 points) Montrer que la série de t.g. $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Montrer ensuite que $\sum_n x_n = 1$ (astuce : trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$).
   5. (2 points) Étudier la convergence de la série de terme général $y_n = \frac{n^n}{3^{1+2n}}$.

2. (7 points) Considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   1. (1 point) Trouver la forme quadratique $q(x, y, z)$ associée à la matrice A.
   2. (2.5 points) Sachant que $\lambda = 1$ est une valeur propre de A, trouver les autres.
   3. (1 points) Donner la définition de forme quadratique définie négative. Est-ce que q peut être définie négative ? Justifier.
   4. (0.5 point) Donner une condition sur α afin que $q(x, y, z)$ soit définie positive.
   5. (2 points) Soit $\alpha = 2$. Justifier, sans faire les calculs, pourquoi A est diagonalisable. Ensuite trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (ne pas calculer P^{-1}).

3. (2 points) Considérons l'équation différentielle (E) : $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Montrer que si f et g sont deux solutions de (E) alors $\alpha f + \mu g$ est une solution de (E). Qu'est ce que l'on peut conclure ?

4. (4 points) Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3$, $y(1) = 0$ sur $]0, +\infty[$.
   1. (1.5 points) Montrer que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $y(x) = kx^n e^{x^{-(n-1)}}$ (avec $n \in \mathbb{N}$ à déterminer).
   2. (2 points) Trouver avec la méthode de variation de la constante une solution particulière de (E).
   3. (0.5 points) Écrire la solution générale qui satisfait la condition initiale.