Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II) **U.E.F.1**

Droit - Economie - Sciences Sociales **5097**

Melun

Année d'étude: Deuxième année de Licence économie-gestion mention administration économique et sociale

Discipline: Techniques Quantitatives: Statistiques
(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1)

Session: Janvier 2019

Titulaire(s) du cours: M.Massimiliano MATTERA

Document(s) autorisé(s): Calculatrice - Tout autre document est interdit.

Le sujet est composé de questions de cours et de trois exercices indépendants.

Questions de cours :

1. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$.
Déterminer, pour tout entier n non nul, la valeur de $P(X > n)$.
b) Rappeler et démontrer la propriété d'absence de mémoire pour les lois géométriques.

2. Enoncer les théorèmes de stabilité pour:
a) La loi Binômiale.
b) La loi de Poisson.
c) La loi Normale.

3. a) Donner la définition des différents de mode de convergence de suites de variables aléatoires.
b) Rappeler la chaîne d'implications entre ces modes de convergence.

4. Enoncer le théorème central limite et la loi faible des grands nombres.

Exercice 1 :

A. On lance 8 fois une pièce de monnaie ayant une probabilité $p = \frac{1}{2}$ de tomber sur pile.
On suppose les lancers indépendants et on note X le nombre de lancers ayant donné pile.
1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X?
2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile?
B. On lance cette même pièce de monnaie indéfiniment et on note Y la variable aléatoire égale au rang du lancer donnant pile pour la première fois et Z le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois un deuxième pile.
Ainsi, par exemple, si la suite des lancers obtenus est: FFPFPPFF... alors $Y = 3$ et $Z = 5$.
1. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y?
b) Calculer $P([Y \geq 3])$
c) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z?
b) Calculer $P([Z \geq 4])$
c) Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 2 :

On tire 3 fois **sans remise** une boule dans une urne contenant 5 boules noires et 5 boules blanches.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Déterminer l'espérance et la variance de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 3 :

Dans une usine de fabrication, le nombre de pièces défectueuses dans la production d'un jour est modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre 2. Un nouveau protocole de qualité, lorsqu'il est respecté, réduit le paramètre de la variable aléatoire X à 1. Par expérience, on sait par ailleurs que la probabilité a priori que le nouveau protocole de qualité est respecté est de 50%. Lors d'une inspection sur place on trouve dans la production du jour exactement 1 pièce défectueuse.
Quelle est la probabilité a posteriori que le nouveau protocole de production ait été respecté?